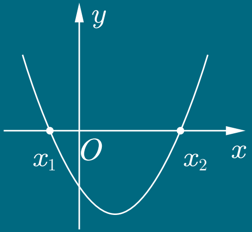
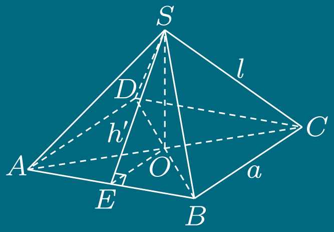
第 1 章 数与式

§1.1 数的相关概念及运算

§1.1.1 数的定义

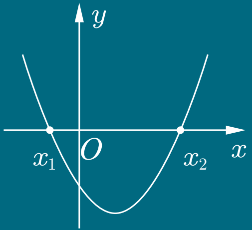
$$f(x)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x)$$

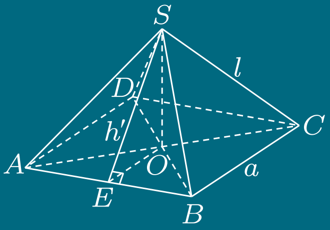




目录

$$f(x)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x)$$





一、自然数

定义

用以计量事物的件数或表示事物次序的数，即如 0、1、2、3、4、5、$\cdots$ 这样的数称为**自然数**。

二、整数

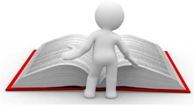
定义

诸如 $\cdots$、-3、-2、-1、0、1、2、3、$\cdots$ 这样的数称为**整数**。

注意

整数可以分为：正整数、0、负整数。

易见，0 与正整数共同构成了自然数。



三、分数

1、定义：

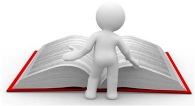
把单位“1”平均分成若干份，表示这样的一份或几份的数叫做**分数**。表示这样一份的数称为**分数单位**。

如：$\frac{1}{2}$，其中的“1”称为**分子**，“2”称为**分母**。

注意

分母表示把单位“1”平均分成几份，分子表示取了其中的几份。

所以“分数 $\frac{1}{0}$”就表示把单位“1”平均分成 0 份，取其中的 1 份，显然这是没有任何意义的，所以**分母不能取** 0。



2、分数的常见形式：

(1) 真分数：分子比分母小的分数。

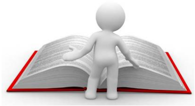
如：$\frac{1}{2}$、$\frac{2}{3}$等。

(2) 假分数：分子比分母大的分数。

如：$\frac{3}{2}$、$\frac{4}{3}$等。

(3) 带分数：既有整数部分，又有分数（真分数）部分的分数。

如$1\frac{1}{2}$、$2\frac{2}{3}$等。



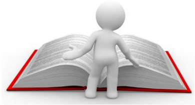
注意

(1) 带分数是假分数的另一种表现形式。

(2) 假分数通常可以化为带分数或者整数。

(3) 因为所有的分数都可以化为 $\frac{b}{a}$ (真分数或假分数)的形式，所以分数也可以定义为：形如 $\frac{b}{a}$ (a、$b \in Z$，$a \neq 0$)的数称为分数。

(4) $\frac{2}{1}$ 是分数。



四、小数

1、定义：

把十进分数(分母为10^n，$n \in Z^+$的分数)仿照整数的写法写成不带分母的形式，这样的数称为小数。

小数分为三部分：整数部分、小数点、小数部分。如0.1、1.5等。

小数可以简单地理解为：含有小数点的数。

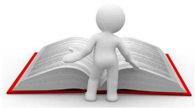
2、小数的常见形式

(1) 纯小数：整数部分为0的小数。如：0.1、0.15等。

(2) 带小数：整数部分不为0的小数。如：1.5、3.14等。

(3) 有限小数：小数部分位数有限的小数。如：3.14、1.25等。

(4) 无限小数：小数部分位数无限的小数。如：$3.1415925\cdots$等。

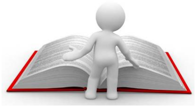


(5) (无限)循环小数：一个小数的小数部分从某一位起，一个或几个数字依次重复出现的数叫循环小数。重复出现的这一节数字称为该循环小数的循环节。因为循环小数必定是无限小数，故循环小数也称为无限循环小数。

如：$0.\dot{3}$、$1.\dot{2}\dot{3}$、$1.\dot{2}3\dot{4}$ 等。

(6) 无限不循环小数：没有循环节的无限小数。

如：$\pi = 3.1415926\cdots$、$e = 2.71828\cdots$ 等。



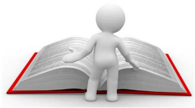
3、小数的分类

- 小数
  - 按整数部分的特征
    - 纯小数
    - 带小数
  - 按小数部分的特征
    - 有限小数
    - 无限小数
      - （无限）循环小数
        - 纯循环小数
        - 混循环小数
      - 无限不循环小数

注意

(1) 分数与有限小数和无限循环小数之间可以互化。

(2) 1.0 是小数。



五、有理数

1、定义：

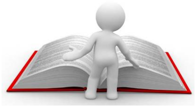
整数和分数统称为有理数。

注意

(1) 因为整数可以看作是分母为 1 的分数，这时可以认为分数包括整数(注意：一般并不这样认为)。所以有理数又可以定义为：可以表示为分数形式($\frac{q}{p}$，p、$q\in Z$，$p\neq 0$)的数称为有理数。

(2) 因为分数与有限小数和无限循环小数可以互化，所以有限小数和无限循环小数都可以看作分数。从而有理数有以下几种具体的表现形式：整数、分数、有限小数、无限循环小数。

(3) 引入负数以后，数的范围扩大为有理数。



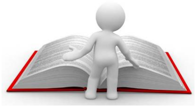
2、有理数的分类

(1) 按整数与分数的关系分类：

- 有理数
  - 整数
    - 正整数
    - 0
    - 负整数
  - 分数
    - 正分数
    - 负分数

(2) 按正负关系分类：

- 有理数
  - 正有理数
    - 正整数
    - 正分数
  - 0
  - 负有理数
    - 负整数
    - 负分数



六、无理数

1、定义：

在实数范围内不能精确地表示为两个整数之比的数，即不是有理数的实数。

注意

(1) 无理数的具体形式主要有两种：开方开不尽的数和无限不循环小数。

(2) “开方开不尽”的无理数是指整体是无理数而不是被开方数是无理数。

如：$\sqrt{2}$ 是无理数，而 2 并不是无理数。

(3) 开方开不尽的数一定是无理数，但无理数不一定是开方开不尽的数。

2、无理数与有理数的区别

(1) 有理数一定可以写成两个整数之比，而无理数一定不能写成两个整数之比。

(2) 把有理数和无理数都化成小数，有理数的结果可能是整数、有限小数、（无限）循环小数，而无理数的结果一定是无限不循环小数。

七、实数

1、定义

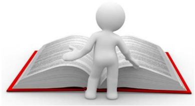
有理数和无理数统称为实数。

注意

实数集是初中阶段遇到的最大的数集，我们平时说的“数”一般就是指实数。

2、实数的分类

$$\text{实数}\begin{cases}\text{按定义}\begin{cases}\text{有理数}\\\text{无理数}\end{cases}\\\text{按正负关系}\begin{cases}\text{正（实）数}\\0\\\text{负（实）数}\end{cases}\end{cases}$$



例题解析

例 1 下列各数中，哪些是有理数，哪些是无理数？

0， 23， 1.010010001， π， $\dfrac{1}{3}$， $-\sqrt{3}$， $1.011205\cdots$

解： 有理数：0，23，1.010010001，$\dfrac{1}{3}$

无理数 π，$-\sqrt{3}$，$1.011205\cdots$

例题解析

例 2 将下列各数分别放入整数、自然数、有理数、无理数、实数的序列里

3，$-\frac{1}{12}$，$\frac{1}{3}$，$-\sqrt{9}$，$\sqrt[3]{-0.064}$，π，$0.010305\cdots$，1.010010001，3.1416，16，0，$\sqrt{7}$，-5

解： 整数：3，$-\sqrt{9}$，16，0，-5

自然数：3，16，0

有理数：3，$-\frac{1}{12}$，$\frac{1}{3}$，$-\sqrt{9}$，$\sqrt[3]{-0.064}$，1.010010001，3.1416，16，0，-5

无理数：π，$0.010305\cdots$，$\sqrt{7}$

实数：全部都是

习题 1.1.1

1、判断下面的说法是否正确，如果不正确，请说明理由并改为正确的 .

(1) 自然数包括 0 和正整数 (T)

(2) 0 是最小的整数 (F)

(3) 无限小数都是无理数 (F)

(4) 无理数都是无限小数 (T)

(5) 无理数都是开方开不尽的数 (F)

2、有问必答 :

(1) 大于 -1 而小于 $+1$ 的整数是哪些？

答： 0

(2) 有比 -2 大的负实数吗？如果有请任意写出 3 个；

答：有，-2 到 0 之间的任意实数都大于 -2，比如：$-\frac{1}{2},-\frac{1}{3},-\frac{1}{4}$.

(3) $\sqrt{7}$ 是什么数？试将它的结果写成小数并保留小数后三位；

答：无理数，$\sqrt{7}\approx 1.732$

(4) 请写出你的年龄、身高、体重，它们分别是哪一类数？

答：　年龄——整数

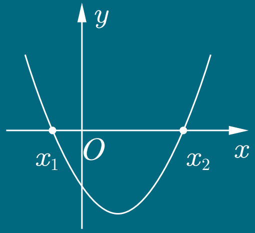
身高——实数

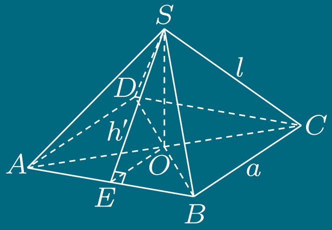
体重——实数

第 1 章 数与式

§1.1 数的相关概念及运算

§1.1.2 数轴

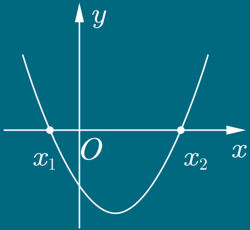


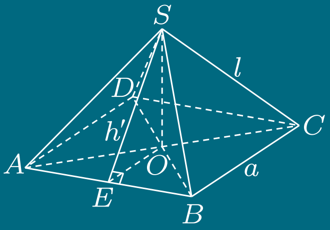


$$f(x)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x)$$

目录

- 数轴（定义、画法、性质）
- 比例尺（定义、公式、常见形式、应用）





$$f(x)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x)$$

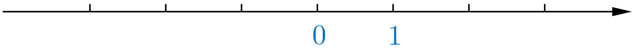
一、数轴

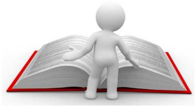
1、定义

在数学中，可以用一条直线上的点表示数，这条直线就叫做**数轴。**

2、画法

画一条水平直线，在直线上任取一点表示 0 (叫做**原点**)，选取某一长度作为**单位长度**，规定直线上向右的方向为**正方向**，就得到了如下所示的数轴：



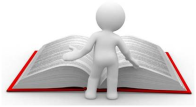


所以，数轴的定义又可以表述为：“规定了原点、正方向和单位长度的直线就叫做数轴。”一般，原点、正方向、单位长度称为**数轴的三要素**，三者缺一不可。

注意

单位长度与**长度单位**不同。

单位长度是指选取任意的长度为标准，以这个标准去度量其他的长度。而长度单位是指 m， cm， mm 等表示长度的单位。



3、性质

(1) 数轴上的点与实数之间是一一对应的。

(2) 一般（默认地）规定向右或向上的方向为正方向。

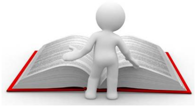
(3) 原点右边的点对应的数为正数，左边的点对应的数为负数。

(4) 右边的点对应的数永远大于左边的点对应的数。

注意

(1) 数轴上的点与有理数不是一一对应的。

(2) 所有的有理数都可以用数轴上的点来表示，但反之，数轴上的点并不都表示有理数。



二、比例尺

1、定义

是指图中的长度与实际的长度相比放大或缩小的倍数。

2、计算公式

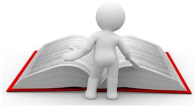
$$比例尺=\frac{图中的长度}{实际的长度}$$

3、常见形式

（1）数字式

用数字的比例式或分数式表示比例尺的大小。

如：$1:10000$，$\frac{1}{10000}$



(2)线段式

画一条线段(一般为1 cm),并注明它所表示的实际长度。

(3)文字式

用文字直接写出图中的单位长度(一般为1 cm)表示实际的多少长度。

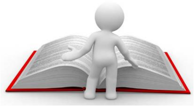
4、常见应用

(1)放大(比例)尺

即比例尺>1,表示图中长度与实际长度相比放大的倍数,分母(后项)通常为1。如:$\frac{10}{1}$,$10:1$等。放大尺在机械制图,精密仪器加工中经常用到。

(2)缩小(比例)尺

即比例尺<1,表示图中长度与实际长度相比缩小为原来的多少分之一,分子(前项)通常为1。如:$1:100$,$1:1000$等。缩小尺在工程制图中经常用到。



例题解析

例 2 用“>”或“<”号填空 .

(1) 2 ______ $2.\dot{4}$; (2) $\frac{1}{3}$ ______ 0.33;

(3) -0.8 ______ -0.9; (4) $-\sqrt{3}$ ______ -1.732

解： (1) 2 __<__ $2.\dot{4}$ (2) $\frac{1}{3}$ __>__ 0.33

(3) -0.8 __>__ -0.9; (4) $-\sqrt{3}$ __<__ -1.732

注意

负数比较大小时可以先比较绝对值的大小，绝对值大的反而小。

例题解析

例 3 认真思考，回答下列问题：

(1) 同一条数轴能不能有两个不同的单位长度？

(2) 所有的数都有倒数，对吗？为什么？

*(3) $|-5|=5$，该式对吗？为什么？

答：(1) 不能。

(2) 不对，0 没有倒数。

(3) 对。

习题 1.1.2

在一张精密零件图样上(比例尺为 $5:1$)，量得零件长 $40\,\mathrm{mm}$，这个零件实际长．

解：设零件的实际长度为 $x\,\mathrm{mm}$.

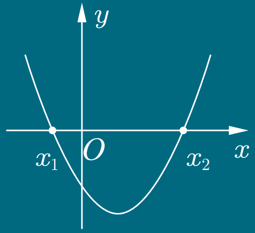
$$\frac{5}{1}=\frac{40}{x}\Rightarrow x=8\ \mathrm{mm}.$$

2、把一个圆形草坪画在比例尺为 $1:2000$ 的平面图上，半径为 $3\,\mathrm{cm}$，这个圆形草坪的实际面积是 ______ m^2 ．(§1.1.3 : 4)

解：设圆形草坪的实际半径为 $r\,\mathrm{cm}$.

$$\frac{1}{2000}=\frac{3}{r}\Rightarrow r=6000\,\mathrm{cm}=60\,\mathrm{m}$$

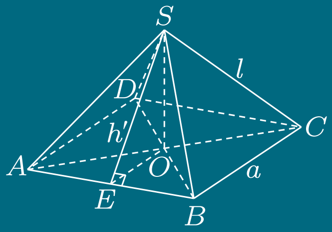
$$\therefore S=\pi r^2\approx 3.14\times 3600=11304\,\mathrm{m}^2.$$



第 1 章 数与式

§1.1 数的相关概念及运算

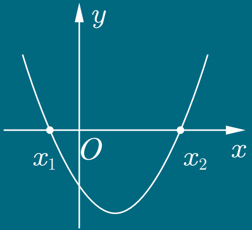
§1.1.3 相反数、倒数、绝对值

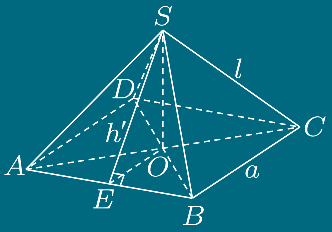


$$f(x)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x)$$

目录

- 相反数
- 倒数
- 绝对值





$$f(x)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x)$$

一、相反数

定义

(1) 代数定义：

只有符号不同的两个数，称其中一个数是另一个数的**相反数**，或说这两个数互为相反数。

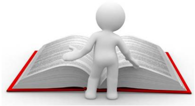
(2) 几何定义：

在数轴上原点两侧，**与原点距离相等**的两个点所表示的数，互为相反数。

注意

(1) 0 的相反数是 0。

(2) 若 a 表示任意实数，则它的相反数可以用 $-a$ 表示。



二、倒数

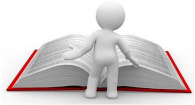
定义

称乘积为 1 的两个数互为倒数。

显然，因为 $a\cdot\frac{1}{a}=1\,(a\neq 0)$，即:若 a 是不等于 0 的任意实数，则 a 的倒数可以用 $\frac{1}{a}$ 表示。如： 2 的倒数是 $\frac{1}{2}$， $\sqrt{2}$ 的倒数是 $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

注意

- 求分数的倒数只须将分子和分母颠倒即可，带分数需要先化为假分数。
- 正数的倒数仍是正数，负数的倒数仍是负数， 0 没有倒数（假设 0 有倒数 a，则根据倒数定义，有 $0\cdot a=1$，显然这样的 a 是不存在的，故 0 没有倒数）。



三、绝对值

1、定义

(1) 代数定义：

一个正数的绝对值是它本身，一个负数的绝对值是它的相反数，0 的绝对值是 0。

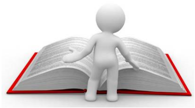
(2) 几何定义：

一个数 a 的绝对值就是数轴上表示数 a 的点与原点的距离

数 a 的绝对值可以记作 $|a|$，

即 $|a|=\begin{cases} a & (a>0) \\ 0 & (a=0) \\ -a & (a<0) \end{cases}$

或合并表示为 $|a|=\begin{cases} a & (a\geqslant 0) \\ -a & (a<0) \end{cases}$

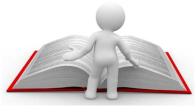


2、绝对值的性质

(1) 对任意实数 a ，其绝对值非负，即 $|a| \geqslant 0$

(2) 互为相反数的两个数的绝对值相等。

(3) 除 0 外，绝对值为一正数的数有两个，它们互为相反数。



例题解析

例 2 写出下列各数的绝对值：

(1) -5，0，0.72 (2) $m+1$

解：(1) $|-5|=5$

$|0|=0$

$|0.72|=0.72$

(2) $|m+1|=\begin{cases} m+1, & m+1\geqslant 0 \\ -(m+1), & m+1<0 \end{cases}$

$\Rightarrow |m+1|=\begin{cases} m+1, & m\geqslant -1 \\ -m-1, & m<-1 \end{cases}$

例 3 已知 $|a-3|=3-a$，试求 a 的取值范围。

解：$\because |a-3|=3-a=-(a-3)$

$\therefore a-3<0$，即 $a<3$

习题 1.1.3

1、画数轴，并在该数轴上标出 -6， 2， 3.5， 0， 4 各数及它们的相反数．最后将这些数按照从小到大的顺序排列

作图：略

由上图知：

$-6<-4<-3.5<-2<0<2<3.5<4<6$

2、判断下列说法(正确的打“√”，错误的打“×”)

(1) 两个互为相反数的和是 0；　　(T)

(2) 两个互为倒数的积是 0；　　(F)

(3) 最小的自然数是 1；　　(F)

(4) 0 的倒数是 0；　　(F)

(5) 如果 $|x|=|y|$, 那么 $x=y$.　　(F)

3、用“>”或“<”号填空

(1) 若 a 是负数，那么 $-a$ $\underline{\quad > \quad}$ 0

(2) 若 $-a$ 是负数，那么 a $\underline{\quad > \quad}$ 0

*4、计算 $|a+1|+|3-a|$ 的值

解：$|a+1|=\begin{cases} a+1, & a+1\geqslant 0 \\ -a-1, & a+1<0 \end{cases}$

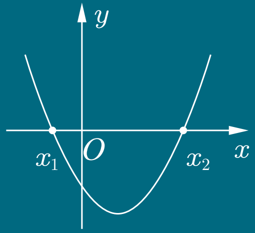
$$\Rightarrow |a+1|=\begin{cases} a+1, & a\geqslant -1 \\ -a-1, & a<-1 \end{cases}$$

$$|3-a|=\begin{cases} 3-a, & 3-a\geqslant 0 \\ a-3, & 3-a<0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow |3-a|=\begin{cases} 3-a, & a\leqslant 3 \\ a-3, & a>3 \end{cases}$$

$$\therefore |a+1|+|3-a|$$
$$=\begin{cases} -a-1+3-a, & a<-1 \\ a+1+3-a, & -1\leqslant a\leqslant 3 \\ a+1+a-3, & a>3 \end{cases}$$
$$\Rightarrow |a+1|+|3-a|$$
$$=\begin{cases} 2(1-a), & a<-1 \\ 4, & -1\leqslant a\leqslant 3 \\ 2(a-1), & a>3 \end{cases}$$

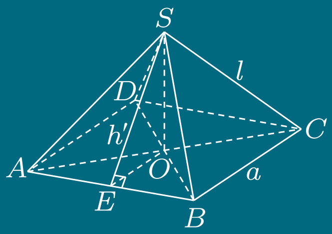
第 1 章 数与式



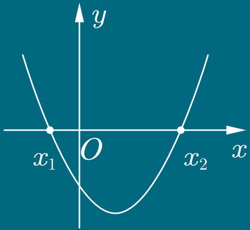
§1.1 数的相关概念及运算

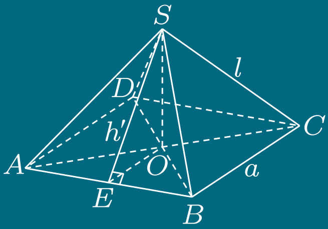
§1.1.4 实数的运算

$$f(x)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x)$$



目录





$$f(x)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x)$$

一、实数的运算

1、加法运算

(1) 运算法则

- 同号两数相加，取相同的符号，并将绝对值相加，即：

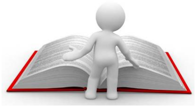
  若$a>0$，$b>0$，则$a+b=+(|a|+|b|)$；

  若$a<0$，$b<0$，则$a+b=-(|a|+|b|)$

- 绝对值不相等的异号两数相加，取绝对值较大的加数的符号，并用较大的绝对值减去较小的绝对值，即：

  若 $a>0$，$b<0$，且$|a|>|b|$，

  则 $a+b=+(|a|-|b|)$；



若 $a<0$，$b>0$，且 $|a|>|b|$，

则 $a+b=-(|a|-|b|)$

- 互为相反数的两数相加得 0，

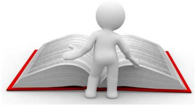
  即：$a+(-a)=0$

- 一个数同 0 相加仍得这个数，

  即：$a+0=a$

(2) 加法运算律

- 交换律：$a+b=b+a$
- 结合律：$a+b+c=a+(b+c)$



2、减法运算

(1) 运算法则

- 减去一个数等于加上这个数的相反数，

  即：$a-b=a+(-b)$

- 0 减去一个数等于这个数的相反数，

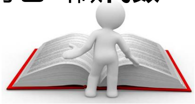
  即：$0-a=-a$

(2) 注意

- 减法运算是利用了相反数的概念将其化归为加法运算。
- **代数和**：由于减法可以化归为加法，从而加减混合运算可以统一成加法运算。

如：$1+2+(-3)-4-(-5)=1+2+(-3)+(-4)+5$

这时式子就变成了几个正数或负数的和，几个正数或负数的和，有时也叫做**代数和**。



3、乘法运算

(1) 运算法则

● 两数相乘，同号得正，异号得负，并把绝对值相乘，即：

若 $a>0$， $b>0$，则 $ab=+(|a|\cdot|b|)$；

若 $a<0$， $b<0$，则 $ab=-(|a|\cdot|b|)$

● 几个不等于 0 的有理数相乘，积的符号由负因数的个数决定。负因数的个数为偶数，积为正；负因数的个数为奇数，积为负。

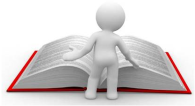
● 任何数与 0 相乘都得 0

(2) 乘法运算律

● 交换律： $ab=ba$

● 结合律： $(ab)c=a(bc)$

● 分配律： $a(b+c)=ab+ac$ 或 $(a+b)c=ac+bc$



4、除法运算

(1) 运算法则

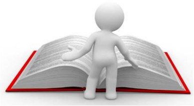
- 除以一个数等于乘以这个数的倒数，

  即：$a \div b = a \times \frac{1}{b} \, (b \neq 0)$

- 两数相除，同号得正，异号得负，并把绝对值相除
- 0 除以任何一个不为 0 的数，都得 0

(2) 注意

- 除法运算是利用了倒数的概念将其化归为乘法运算
- 0 不能作为除数



5、乘方运算

(1) 定义

求 n 个相同因数 a 的积的运算叫做乘方。记作：a^n，读作：a 的 n 次方，即 $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots \cdot a}_{n个}$。乘方的结果叫做幂。$a^n$ 中，a 叫做底数，n 叫做指数，a^n 看作结果时，也可以读作：a 的 n 次幂。

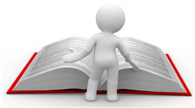
(2) (符号)运算法则

- 正数的任何次幂是正数；负数的奇次幂是负数，偶次幂是正数
- 任何数的偶次幂都是非负数

(3) 注意

- 任何数都可以看作它本身的 1 次方，

  即：$a = a^1$



- 当底数是负数或分数时，要先用括号将底数括起来，再写上指数。如：$(-1)^2$，$\left(\frac{1}{2}\right)^3$。

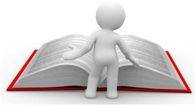
6、开方运算

(1) 平方根

① 定义：如果 $x^2=a$，则 x 就叫做 a 的平方根或二次方根。

② 性质：

- 正数 a 的平方根有两个，它们互为相反数，记作：$\pm\sqrt{a}$
- 负数没有平方根
- 0 的平方根是 0



(2) 算数平方根

① 定义：一个数 a 的非负的平方根，叫做 a 的算数平方根，记作 $\sqrt{a}$

② 性质：算数平方根 $\sqrt{a}$ 具有双重非负性：被开方数 a 非负；算数平方根 $\sqrt{a}$ 本身非负。

(3) 开平方

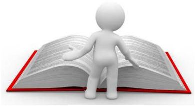
定义：求一个数 a 的平方根的运算，叫做开平方。

(4) 立方根

① 定义：如果 $x^3 = a$，则 x 就叫做 a 的立方根或 3 次方根

② 性质

- 正数有一个正的立方根
- 负数有一个负的立方根
- 0 的立方根是它本身



(5) 开立方

定义：求一个数 a 的了立方根的运算，叫做开立方。

注意

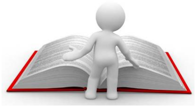
求一个负数的立方根时，只须先求出它的绝对值的立方根，再取相反数即可。即三次根号内的负号可以移到根号外面，亦即若 $a>0$，则 $\sqrt[3]{-a}=-\sqrt[3]{a}$.

(6) n 次方根

① 定义：如果 $x^n=a(n\in Z,n>1)$，则 x 就叫做 a 的 n 次方根

② 性质

- n 为大于 2 的偶数时，与平方根类似
- n 为大于 3 的奇数时，与立方根类似。



(7) n 次算数根

① 定义：一个数 a(非负) 的非负的 n 次方根，叫做 a 的 n 次算数根

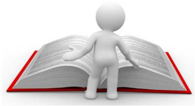
② 性质：n 次算数根也具有双重非负性：$a \geqslant 0$，$\sqrt[n]{a} \geqslant 0$

(8) 开 n 次方

求一个数 a 的 n 次方根的运算，叫做把 a 开 n 次方，记作 $\sqrt[n]{a}$。其中 a 叫做被开方数，n 叫做根指数。

(9) 开方

求一个数的方根的运算，叫做开方。显然“开 n 次方”与“n 次方”互为逆运算。



二、实数混合运算

1、运算级

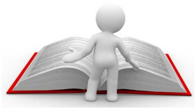
在初等代数中，规定加减运算为一级运算，乘除运算为二级运算，乘方和开方运算为三级运算。

2、运算顺序

(1) 先计算括号里边的部分，括号的运算顺序为由小到大。

(2) 再按照运算级由高到低的顺序进行计算。

(3) 同级运算中按照由左到右的顺序进行计算。



三、科学计数法、近似数和有效数字

1、科学计数法

把一个数写成$a\times10^{n}$(其中$1\leqslant|a|<10$，$n\in Z$)的形式。

2、近似数

与准确数相对应，就是与实际数字（准确数）接近的数。

3、近似数的精确度

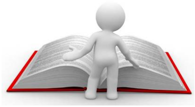
一个近似数的精确度一般有两种表示方法：

(1) 精确到××位或精确到小数点后××位

例如：　准确数π(精确到个位）≈ 3，

π(精确到十分位）≈ 3.1，

π(精确到百分位）≈ 3.14，



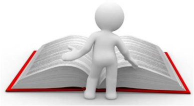
π(精确到千分位)≈ 3.142

(2) 保留 $\times\times$ 个有效数字

有效数字：指从左边第一个不是 0 的数字起，到精确到的数位为止，所有的数字

例如： π(保留 3 个有效数字)≈ 3.14

123456(保留 4 个有效数字)$\approx 1.235\times 10^{5}$



例题解析

例 1 求值：

(1) $-3+(-8)$，　(2) $\pi-(-2)$，　(3) $(-5)\times 0$，

(4) $(-36)\div 4$，　(5) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$，　(6) $\sqrt{256}$

解：(1) $-3+(-8)=-3-8=-11$，

(2) $\pi-(-2)=\pi+2$

(3) $(-5)\times 0=0$

(4) $(-36)\div 4=\frac{-36}{4}=-\frac{36}{4}=-9$

(5) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3=-\left(\frac{1}{2}\right)^3=-\frac{1}{8}$

(6) $\sqrt{256}=16$

例题解析

例2 求下列各数的平方根，并写出算数平方根

(1) 36， (2) 0.04， (3) $\frac{25}{49}$

解：	平方根	算数平方根
(1)	$\pm\sqrt{36}=\pm 6$	6
(2)	$\pm\sqrt{0.04}=\pm 0.2$	0.2
(3)	$\pm\sqrt{\frac{25}{49}}=\pm\frac{5}{7}$	$\frac{5}{7}$

例题解析

例 3 求下列各数的立方根

(1) 27 ， (2) -0.001 ， (3) $\frac{1}{64}$

解：(1) $\sqrt[3]{27}=3$

(2) $\sqrt[3]{-0.001}=-0.1$

(3) $\sqrt[3]{\frac{1}{64}}=\frac{1}{4}$

例 4 用科学计数法记出下列各数

(1) $88{,}000{,}000$ ， (2) $609{,}000{,}000$ ， (3) $0.000{,}038{,}4$

解：(1) $88{,}000{,}000=8.8\times10^{7}$

(2) $609{,}000{,}000=6.09\times10^{8}$

(3) $0.000{,}038{,}4=3.84\times10^{-5}$

习题 1.1.4

1、已知 $x^2=324$，求 x

解：$\because x^2=324$，

$\therefore x=\pm\sqrt{324}=\pm 18$

2、已知 $x^3=125$，求 x

解：$\because x^3=125$，

$\therefore x=\sqrt[3]{125}=5$

3、用计算器计算(精确到 0.01)

(1) $\sqrt{3426}$，　(2) $(0,86)^2$，　(3) $\sqrt[3]{123,4}$，

(4) $(0.37)^4$，　(5) 0.025×3.14，　(6) $\dfrac{1.23\times 0.38}{15}$

解：(1) $\sqrt{3426} \approx 58.53$

(2) $(0.86)^2 = 0.7396 \approx 0.74$

(3) $\sqrt[3]{123,4} \approx 4.98$

(4) $(0.37)^4 = 0.01874161 \approx 0.02$

(5) $0.025 \times 3.14 = 0.0785 \approx 0.08$

(6) $\dfrac{1.23 \times 0.38}{15} = 0.03116 \approx 0.03$

4、据报道，2010 年我国粮食产量将达到 $540{,}000{,}000{,}000\ \mathrm{kg}$，用科学计数法表示这个粮食产量为 ______ kg.

解：$540{,}000{,}000{,}000 = 5.4 \times 10^{11}\ \mathrm{kg}$

5、在比例尺为 $1:100,000,000$ 的地图上，量得图上两地间的距离为 $4.2\,\mathrm{cm}$，用科学计数法表示实际两地间的距离为_____ km.

解：设实际两地间的距离为 $x\,\mathrm{cm}$.

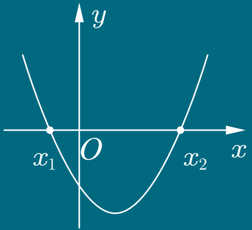
则 $\dfrac{1}{100000000}=\dfrac{4.2}{x}$

$\Rightarrow x=4.2\times10^{8}\,cm=4.2\times10^{3}\ \mathrm{km}.$

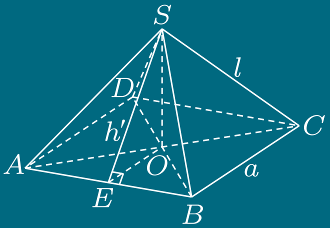
第 1 章 数与式

§1.2 代数式及相关运算

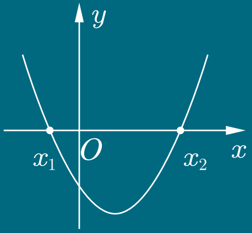
§1.2.1 代数式及其相关概念

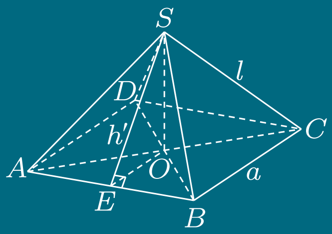


$$f(x)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x)$$



目录





$$f(x)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x)$$

一、式及其相关概念

1、代数式

(1) 定义

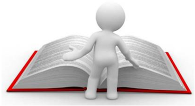
由数和表示数的字母经有限次的**加**、**减**、**乘**、**除**、**乘方**和**开方**等**代数运算**所得的式子称为代数式。

如：$a+b$，$2ab$，$-\dfrac{b}{2a}$，$\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 等。

代数式包括有理式和无理式。

(2) 代数式的值

用数值代替代数式里的字母，计算后所得的结果叫做代数式的值。



(3) 注意

● 单独的一个数或者一个字母也是代数式。

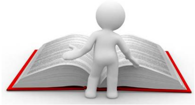
如：2、x等。

● 代数式中只允许出现加、减、乘、除、（有理数次）乘方、开方等代数运算，不允许出现无理数次乘方、指数、对数、三角、反三角等数学运算。

如：$x^{\sqrt{2}}$、x^y、$\ln x$、$\sin x$、$\arcsin x$等都不是代数式，一般称它们为**超越式**。

● 不允许出现等号、不等号等。

如：$ax^2+bx+c=0$、$a+b>c$等都不是代数式。



例题解析

例 1 下列式子中，哪些是代数式？

0、$4x+5y$、$3y$、-10、$2x=3y$、$2+1=3$、$3x>0$

解：0 是，$4x+5$ 是，

$3y$ 是，-10 是，

$2x=3y$ 不是，$2+1=3$ 不是，

$3x>0$ 不是.

例 2 钢笔每支 5 元，铅笔每支 0.8 元，买 m 支钢笔和 n 支铅笔，应付多少钱？用代数式表示。

解：$5m+0.8n$ 元

课堂练习

1、填空

(1) n箱苹果重$p\ kg$，每箱重 $\underline{\quad \dfrac{p}{n} \quad}$ kg.

(2) 甲身高a cm，乙比甲矮$b\ cm$，那么乙的身高为 $\underline{\ a-b\ }$ cm.

(3) 底为a，高为h的三角形面积是 $\underline{\ \dfrac{1}{2}ah\ }$.

(4) 全校学生人数是x，女生占48%，则女生人数是 $\underline{\ 48\%\cdot x\ }$ 人，男生人数是 $\underline{\ 52\%\cdot x\ }$ 人。

(5) 某合唱团共有队员m人，其中女队员占58%，则男队员有 $\underline{\ 42\%m\ }$ 人。

(6) 汽车以$80\,km/h$的速度行驶了$t\ \ h$后，又行驶了$12\,km$，汽车共行驶了 $\underline{\ 80t+12\ }$ km.

2、说出下列代数式的意义

(1) $2a-3c$　　(2) $x+1$　　(3) $ab+1$　　(4) a^2-b^2

解：(1) 2 个 a 与 3 个 c 的差

(2) x 与 1 的和

(3) a 与 b 的积与 1 的和

(4) a 的平方与 b 的平方的差

3、某市出租车收费标准为起步价 10 元，$3\ km$ 后按 1.8 元 $/km$ 收费，则某人乘坐出租车 $x\ km$ 的付费为多少元？

解：当 $x \leqslant 3$ 时：10 元

当 $x > 3$ 时：$1.8(x-3)+10$ 元

2、有理式

只包含有：**加**、**减**、**乘**、**除**四种运算的**代数式。**

注意

- 整数次乘方可以看做是乘法运算的特殊情况

如：x^2、x^{-3}、$\cdots$都属于有理式

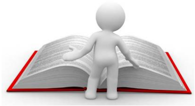
- 有理式包括：整式和分式。

3、整式

不包含除法运算，或虽然有除法运算，但除数中不含有字母的有理式。

注意

整式又包括：单项式和多项式。



4、单项式

不包含加、减运算的整式。

如：xyz、$\frac{1}{2}x$、πr^2、 $\cdots$

(1) 单项式的系数

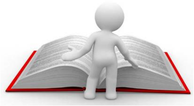
单项式中的数字因数。

如：单项式 πr^2 的系数为：π

(2) 单项式的次数

单项式中所有字母的指数之和。

如：单项式 xyz 的次数为：3



5、多项式

几个单项式的代数和。

如：$kx+b$、ax^2+bx+c、$\cdots$

(1) 多项式的项

多项式中的每一个单项式。

(2) 常数项

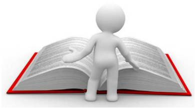
不含有字母的项。

(3) 同类项

含有相同的字母，且相同字母的指数也分别相同的项。

注意

常数项也是一种同类项。



(4) 多项式的次数

多项式中次数最高的项（单项式）的次数。

如：多项式 ax^2+bx+c 的次数为：2

6、分式

包含除法运算，且除数中包含有字母的有理式。

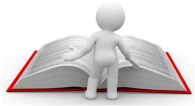
即：形如 $\dfrac{A}{B}$，A、B 是整式，B 中含有字母且 $B\neq 0$ 的式子叫做分式。

如：$\dfrac{x}{2}$——整式，$\dfrac{y}{x}$——分式

7、无理式

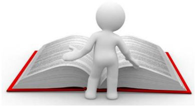
含有字母的根式，或含有字母的非整数次乘方的代数式。

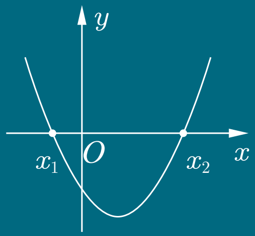
如：$\sqrt{x}$、$x^{\frac{1}{3}}$、$\cdots$



二、各种“式”的关系

- 式
  - 代数式
    - 概念：由数和表示数的字母通过特定运算连结所得的式子
      - $+,-,\times,\div,x^2,\sqrt{x},\cdots$
      - $x^{\sqrt{2}},2^x,\ln x,\sin x,\arcsin x,\cdots$
      - $=,\neq,>,<,\geqslant,\leqslant,\cdots$
      - $2,x,\cdots$ 是代数式
    - 分类
      - 有理式
        - 概念：只有特定运算的代数式
        - 分类
          - 整式
            - 概念：不含除法运算的有理式
              - $\div$
              - $\frac{x}{2}$ 应理解为 $\frac{1}{2}x$ 是整式
            - 分类
              - 单项式：不含加减运算的整式
              - 多项式：几个单项式的代数和
          - 分式：包含除法运算且除数中有字母的有理式
      - 无理式：含有字母的根式或非整数次乘方的代数式
        - $\sqrt{x}$
        - $x^{\frac{1}{3}}$
  - 超越式：含有无理数次乘方、指数、对数、三角、反三角函数等的式子

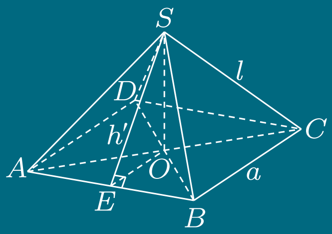




第 1 章 数与式

§1.2 代数式及相关运算

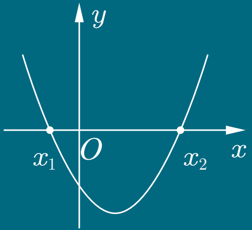
§1.2.2 代数式的运算

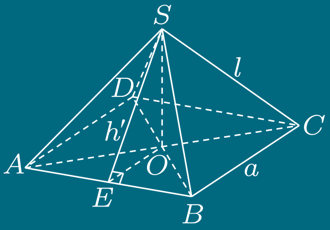


$$f(x)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x)$$

目录

- 整式运算
- 合并同类型、去添括号、同底数幂运算
- 乘法公式、多项式的因式分解
- 分式运算
- 约分、加减、乘除、乘方、根式





$$f(x)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x)$$

一、整式运算

1、合并同类项

(1) 概念：

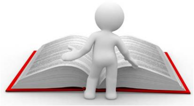
把多项式中的同类项合并成一项。

(2) 方法：

同类项系数相加，其他不变

如： $ax^2+bx^2+cx+dx+e+f$

$$=(a+b)x^2+(c+d)x+(e+f)$$



2、去括号、添括号

(1) 去括号法则

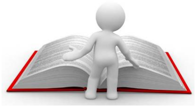
$$+(a \pm b) = +a \pm b$$

$$-(a \pm b) = -a \mp b$$

(2) 添括号法则

$$a \pm b = +(a \pm b)$$

$$a \pm b = -(-a \mp b)$$



例题解析

例 1 先去括号，再合并同类项：

(1) $a+(b-c-a)$;　　(2) $a-(b-c-a)$.

解：(1) $a+(b-c-a)$

$=a+b-c-a$

$=b-c$

(2) $a-(b-c-a)$

$=a-b+c+a$

$=2a-b+c$

3、同底数幂运算法则

(1) 同底数幂相乘

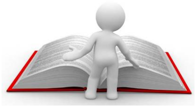
$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

规定

- $a^0 = 1(a \neq 0)$
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
- $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$

(2) 同底数幂相除

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$



4、乘法公式

（1）平方差公式

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

（2）完全平方公式

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

（3）立方和（差）公式

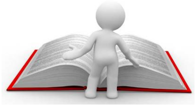
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

（4）完全立方公式

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$



5、多项式的因式分解

(1) 概念

把多项式化成几个整式乘积的形式。

(2) 常用方法

① 提公因式法

$$ma+\mathrm{mb}=m(a+b)$$

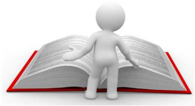
注意：提完整

② 公式法

利用乘法公式来进行因式分解

③ 分组分解法

先分组再分解



如： $ax+ay+bx+by$

$$=(a+b)x+(a+b)y$$

$$=(a+b)(x+y)$$

④ 十字相乘法

类型 1： $x^2+(p+q)x+pq$ 型

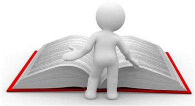
特点：

- 二次项的系数为 1 ，常数项是两个因数的乘积
- 一次项是常数项两个因数之和

方法：

$$\begin{array}{ccc} x & & p \\ & \times & \\ x & & q \end{array}$$

结果： $(x+p)(x+q)$



类型2： kx^2+mx+n 型

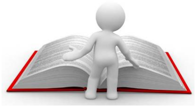
特点：

- $k=a\cdot b$
- $n=c\cdot d$
- $a\cdot d+b\cdot c=m$

方法：

$$\begin{array}{ccc} ax & & c \\ & \times & \\ bx & & d \end{array}$$

结果： $(ax+c)(bx+d)$



例题解析

例 2 把下列二次三项式分解因式

(1) x^2-5x+6;　　(2) $6x^2-7x-3$

解：(1) $\because$

$$\begin{array}{ccc} x & & -2 \\ & \times & \\ x & & -3 \end{array}$$

$\therefore x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$

(2) $\because$

$$\begin{array}{ccc} 2x & & -3 \\ & \times & \\ 3x & & 1 \end{array}$$

$\therefore 6x^2-7x-3=(2x-3)(3x+1)$

二、分式运算

1、约分

(1) 概念：

分式的分子和分母同除以相同的公因式，分式的值不变。

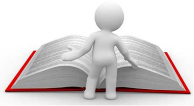
(2) 注意：

分式约分时一定要约到最简分式或整式

- 最简分式：分子、分母没有公因式的分式。

(3) 性质：

给分式的分子和分母乘以（或除以）同一个不等于 0 的整式时，分式的值不变。



2、加减运算

(1) $\frac{A}{C} \pm \frac{B}{C} = \frac{A \pm B}{C}$

(2) $\frac{A}{B} \pm \frac{C}{D} = \frac{AD}{BD} \pm \frac{BC}{BD} = \frac{AD \pm BC}{BD}$

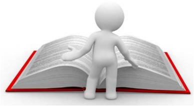
3、乘除运算

(1) $\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$

(2) $\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \times \frac{D}{C} = \frac{AD}{BC}$

4、乘方运算

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n = \frac{A^n}{B^n}$$



例题解析

例 3 化简

(1) $\dfrac{2x}{x-1}-1$;　　(2) $\dfrac{a-1}{a-1}+\dfrac{a}{a+1}$

解：(1) $\dfrac{2x}{x-1}-1=\dfrac{2x-(x-1)}{x-1}$

$$=\frac{x+1}{x-1}$$

(2) $\dfrac{a-1}{a-1}+\dfrac{a}{a+1}=1+\dfrac{a}{a+1}=\dfrac{2a+1}{a+1}$

5、根式运算

(1) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^{n}=a$

注意

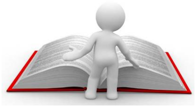
根式中 a 的取值范围

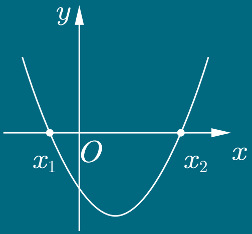
- 当 n 为奇数时： $a\in R$
- 当 n 为偶数时： $a\geqslant 0$

(2) $\sqrt[n]{a^{n}}=\begin{cases} a & ,n\text{为奇数} \\ |a| & ,n\text{为偶数} \end{cases}$

(3) $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$

(4) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

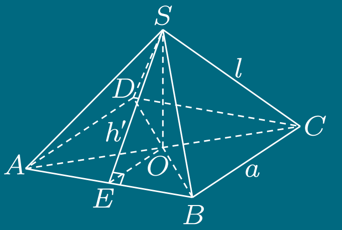




§2 方程与不等式

2.1 方程

$$f(x)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x)$$



一、方程及其相关概念

1、方程

(1) 概念

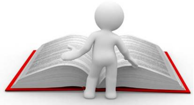
含有未知数的等式。

(2) 特点

◆ 必须是等式

◆ 必须含有未知数（至少含有一个未知数）

2、等式



(1) 概念

含有等号的式子。

(2) 分类

◆ 恒等式：一定成立的等式

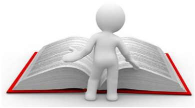
如：$1+1=2$，"="也可写作"≡"。

◆ 矛盾等式：一定不成立的等式

如：$x=x+1$

◆ 条件等式：有条件地成立的等式

如：$(\sqrt{x})^2=x,(x\geqslant 0)$



3、方程的元

方程中的未知数

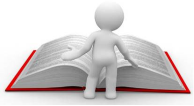
◆ 方程中有几个未知数就称这个方程为“几元方程”。

4、方程的次数

方程中含有未知数的项中，未知数的次数之和最高的项的次数。

如：$x^2+2x=3$——二次方程

◆ 方程的命名



如：$x-2=0$——一元一次方程

$x^2+3x+1=0$——一元二次方程

$xy+x+y=0$——二元二次方程

5、常数项

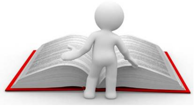
方程中不含任何未知数的项

6、方程的解

(1) 概念：

使方程左右两边的值相等的未知数的值

(2) 注意：



◆ 解是所有未知数的值的总称，并不是某一个未知数的值。

如：对方程 $x+y=0$ 来说

$x=0, y=0$ 是方程的一组解

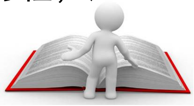
不能说 $x=0$ 是方程的一个解

◆ 一元方程的解也叫作“根”。

7、解方程

求方程的解（或根）的过程

◆ 对有约束条件或涉及实际为题的方程，应该对解进行检验



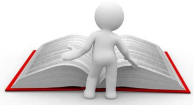
8、同解方程

(1) 概念：

如果两个方程的解完全相同，则这两个方程互为同解方程。

(2) 性质：

- 方程两边都加上(或减去)同一个整式，所得方程和原方程是同解方程
- 方程两边同乘以(或除以)同一个不等于0的整式，所得方程和原方程是同解方程



二、方程的解法

1、一元一次方程

(1) 一般形式：

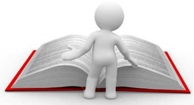
$$ax+b=0(a,b\text{ 为常数，}\quad a\neq 0)$$

(2) 解法：

化简——化为最简同解方程即可。

(3) 步骤：

- 去括号
- 移项
- 合并同类型
- 检验



例题解析

例1 解方程 $5(x-1)=3(2-3x)-2(x+5)$

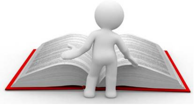
解：$5x-5=6-9x-2x-10$

$5x+9x+2x=6-10+5$

$16x=1$

$x=\dfrac{1}{16}$

例2 地板砖厂的坯料由白土、沙土、石膏、水按 $25:2:1:6$ 的比例配制搅拌而成。现已将前三种原料称量好，共 $5600kg$，应加多少千克的水？前三种料各称量了多少千克？



解：设加入了$x\ kg$的石膏，则加入的白土、沙土和水的量分别为：$25x\ kg$、$2x\ kg$、$6x\ kg$

$\therefore\ 25x+2x+x=5600$

$28x=5600$

$x=200$

$\therefore$ 加入水的量应为：$6x=1200\ kg$

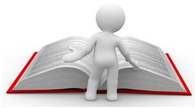
前三种料的量分别为：

白土：$25x=5000\ kg$

沙土：$2x=400\ kg$

石膏：$x=200\ kg$

答：略。

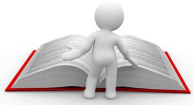


2、二元一次方程组

(1) 一般形式：

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

(2) 解法：



◆ 代入消元法

例 3 解方程组 $\begin{cases} x-2=0 \\ 2x-y=5 \end{cases}$

解： $\begin{cases} x-2=0 & (1) \\ 2x-y=5 & (2) \end{cases}$

由 (1) 得： $x=2$

代入 (2) 得： $y=2x-5=-1$

∴ 方程组的解为：

$$\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$$

◆ 加减消元法

例 4 解方程组 $\begin{cases} x+y=5 \\ 3x-y=1 \end{cases}$

解： $\begin{cases} x+y=5 & (1) \\ 3x-y=1 & (2) \end{cases}$

$(1)+(2)$ 得： $4x=6$

$\therefore x=\dfrac{3}{2}$

代入 (1) 得： $y=5-x=5-\dfrac{3}{2}=\dfrac{7}{2}$

$\therefore$ 方程组的解为： $\begin{cases} x=\dfrac{3}{2} \\ y=\dfrac{7}{2} \end{cases}$

3、一元二次方程

(1) 一般形式：

$ax^2+bx+c=0$(a、b、c 为常数，$a\neq 0$)

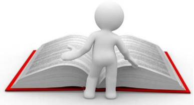
(2) 解法：

① 直接开平方法

适用于 $x^2=p$ 或 $(ax+b)^2=p(p\geqslant 0)$ 型

◆ $x^2=p\ (p\geqslant 0)$

$\xRightarrow{\text{开平方}} x=\pm\sqrt{p}$



◆ $(ax+b)^2=p \quad (p\geqslant 0)$

$$\xRightarrow{\text{开平方}} ax+b=\pm\sqrt{p}$$

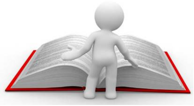
$$\xRightarrow{\text{解一元一次方程}} x=\frac{-b\pm\sqrt{p}}{a}$$

② 配方法

将一元二次方程配方成 $(x+a)^2=b$ 的形式，在利用直接开平方法求解

步骤：

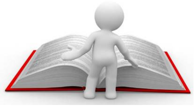
◇ 化二次项系数为 1



◇ 移项：使二次、一次项在方程左边，常数项在方程右边

◇ 配方：方程两边都加上一次项系数一半的平方，使方程变为 $(x+a)^2=b$ 形式

◇ 直接开平方求解



例 5　用配方法解方程 $x^2+4x-5=0$

解：移项：　$x^2+4x=5$

配方：　$x^2+4x+2^2=5+2^2$

$$(x+2)^2=9$$

直接开平方：　$x+2=\pm 3$

$\therefore\ x_1=1$，　$x_2=-5$

③ 公式法

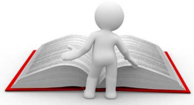
利用一元二次方程的求根公式求解

求根公式：

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}(\Delta\geqslant 0)$$

根的判别式：

$$\Delta=b^2-4ac$$



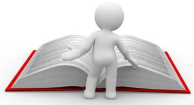
◇ $\Delta > 0$ 时： 有两个不相等的实根

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

◇ $\Delta = 0$ 时：有一个（两个相等的）实根

$$x = -\frac{b}{2a}$$

◇ $\Delta < 0$ 时： 无实根



例 6　利用求根公式判断方程 $2x^2+5x=-3$ 是否有实根，若有求出结果

解：化为一般形式：

$$2x^2+5x+3=0$$

求判别式：

$$\Delta=5^2-4\times2\times3=1>0$$

$\therefore$ 方程有两个不相等的实根

$$x_1=\frac{-5+\sqrt{1}}{2\times2}=-1$$

$$x_2=\frac{-5-1}{4}=-\frac{3}{2}$$

④ 因式分解法

利用因式分解求解一元二次方程的方法（属于特殊方法）

例7 解方程 $x^2 - x = 2$

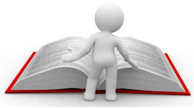
解：化为一般形式：

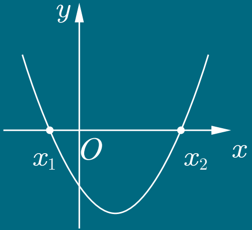
$$x^2 - x - 2 = 0$$

因式分解：

$$(x-2)(x+1) = 0$$

$\therefore\ x_1 = 2,\quad x_2 = -1$

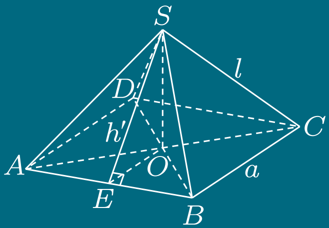




§2 方程与不等式

2.2 不等式

$$f(x)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x)$$

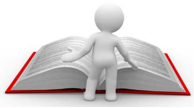


一、不等式及其相关概念

1、不等式

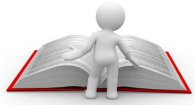
(1) 概念

用不等号($<,\leqslant,>,\geqslant,\neq$)连接，表示不等关系的式子



（2）分类

- 不等式
  - 不等号类型
    - 严格不等式　用“$<,>$”连接
    - 非严格不等式　用“$\leqslant,\geqslant$”连接
  - 成立与否
    - 绝对不等式　一定成立
    - 矛盾不等式　一定不成立
    - 条件不等式　有条件地成立

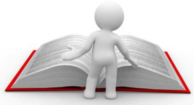


2、不等式的解集

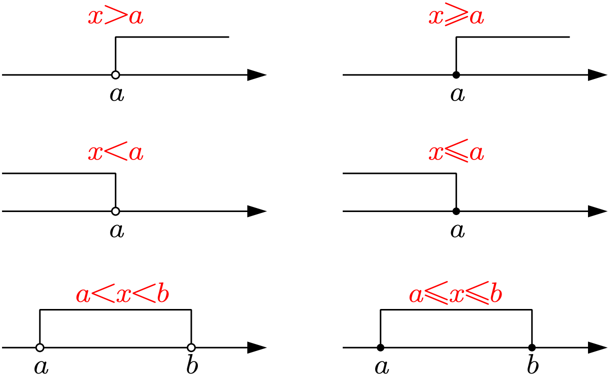
(1) 概念

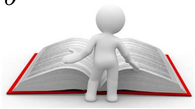
使不等式成立的未知数的集合

(所有解的全体)



（2）在数轴上表示不等式的解集





3、解不等式

求不等式解集的过程

二、不等式的基本性质

1、对称性：

$$a < b \Leftrightarrow b > a$$

$$a > b \Leftrightarrow b < a$$

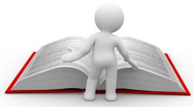
2、传递性：

$$a < b, b < c \Rightarrow a < c$$

$$a > b, b > c \Rightarrow a > c$$

3、加法单调性（加法原则、可加性）

$$a > b \Rightarrow a + c > b + c$$



4、同向不等式相加：

$$a > b, c > d \Rightarrow a + c > b + d$$

5、乘法单调性（乘法原则、可乘性）

$$a > b, c > 0 \Rightarrow ac > bc$$

$$a > b, c < 0 \Rightarrow ac < bc$$

6、正值同向不等式相乘

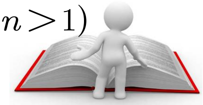
$$a > b > 0, c > d > 0 \Rightarrow ac > bd$$

7、正值乘方性

$$a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n > 0 (n \in Z \text{ 且 } n > 1)$$

8、正值开方性

$$a > b > 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b} > 0 (n \in Z \text{ 且 } n > 1)$$



三、两个实数大小的比较

1、作差法

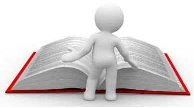
◆ 方法：比较 $a-b$ 与 0 的关系

$$a-b\begin{cases}>0\\=0\\<0\end{cases}\Leftrightarrow a\begin{cases}>b\\=b\\<b\end{cases}$$

2、作商法

◆ 方法：比较 $\dfrac{a}{b}$ 与 1 的关系 $(a>0,b>0)$

$$\frac{a}{b}\begin{cases}>1\\=1\\<1\end{cases}\Leftrightarrow a\begin{cases}>b\\=b\\<b\end{cases}$$



例题解析

例1 比较 $\frac{4}{5}$ 和 $\frac{5}{6}$ 的大小

解：（作差）

$$\because \frac{4}{5}-\frac{5}{6}=\frac{24-25}{30}=-\frac{1}{30}<0$$

$$\therefore \frac{4}{5}<\frac{5}{6}$$

（作商）

$$\because \frac{4}{5}\div\frac{5}{6}=\frac{4}{5}\times\frac{6}{5}=\frac{24}{25}<1$$

$$\therefore \frac{4}{5}<\frac{5}{6}$$

例2 比较 $1+\sqrt{2}$ 和 2 的大小

解：（作差）

$\because\ 1+\sqrt{2}-2=\sqrt{2}-1=\sqrt{2}-\sqrt{1}>0$

$\therefore\ 1+\sqrt{2}>2$

（作商）

$$\because\ \frac{1+\sqrt{2}}{2}>\frac{1+\sqrt{1}}{2}=1$$

$\therefore\ 1+\sqrt{2}>2$

四、不等式的解法

1、一元一次不等式

(1) 一般形式：

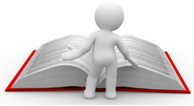
$ax+b>0(a\neq 0)$(以“$>$”为例，其他同)

(2) 解法：

$$ax+b>0$$

$$\xrightarrow{\text{移项}} ax>-b$$

$$\xrightarrow{\text{两边同除以}\,a} \begin{cases} x>-\dfrac{b}{a} & ,a>0 \\ x<-\dfrac{b}{a} & ,a<0 \end{cases}$$

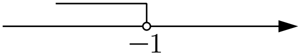


例3 解下列不等式，并在数轴上表示解集

(1) $x-4<-5$ (2) $\dfrac{2x-3}{7}\geqslant\dfrac{3x+2}{4}$

解：(1) $x-4<-5\Rightarrow x<-1$

作图：



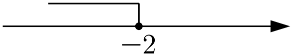
(2) $4(2x-3)\geqslant 7(3x+2)$

$\Rightarrow 8x-12\geqslant 21x+14$

$\Rightarrow 21x-8x\leqslant -12-14$

$\Rightarrow 13x\leqslant -26\Rightarrow x\leqslant -2$

作图：



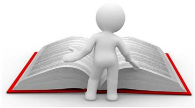
2、一元一次不等式组

(1) 不等式组的解集

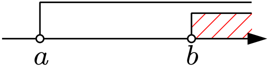
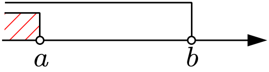
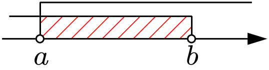
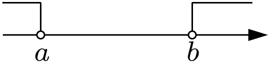
不等式组中，每个不等式的解集的公共部分

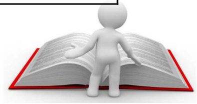
(2) 解法(步骤)：

- ◆ 求出不等式组中每个不等式的解集
- ◆ 利用数轴求出各不等式解集的公共部分，即为所求
- ◆ 若公共部分不存在，则不等式组的解集为空集 $\varnothing$



(3) 利用数轴判定不等式组解集的方法

不等式组	数轴表示（假设 $a<b$）	解集
$\begin{cases} x>a \\ x>b \end{cases}$		$x>b$
$\begin{cases} x<a \\ x<b \end{cases}$		$x<a$
$\begin{cases} x>a \\ x<b \end{cases}$		$a<x<b$
$\begin{cases} x<a \\ x>b \end{cases}$		$\varnothing$



3、一元二次不等式

（1）一般形式：（以“>”为例，其他同）

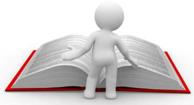
$$ax^2+bx+c>0(a\neq 0)$$

（2）解法：

◆ 利用一元二次函数图象求解

① 基本思想：

利用方程的解（根）与函数的零值点的关系，先求出一元二次方程的根，再根据函数的图象与 x 轴的位置关系确定一元二次不等式的解集。



◇ 方程的解（根）与函数的零值点的关系：

方程$f(x)=0$的解（根）是使函数$y=f(x)$的函数值为0的所有自变量x的取值，即函数$y=f(x)$的零值点。

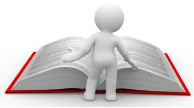
② 步骤：

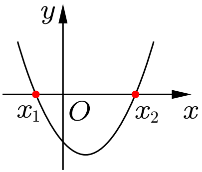
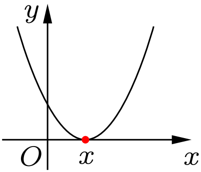
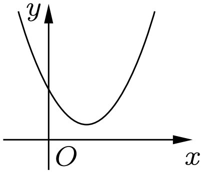
◇ 将一元二次不等式化为一般形式

◇ 求一元二次不等式对应的一元二次方程的根

◇ 作图，将方程的解（根）标在坐标轴上

◇ 写出一元二次不等式的解集



$\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
$y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$			
$ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$ 的根	有两个不相等实根 $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	有一个实根 $x=-\frac{b}{2a}$	无实根
$ax^2+bx+c<0$ $(a>0)$ 的解集	$x_1<x<x_2$	$\varnothing$	$\varnothing$
$ax^2+bx+c>0$ $(a>0)$ 的解集	$x<x_1$ 或 $x>x_2$	$x\neq-\frac{b}{2a}$	R
$ax^2+bx+c\leqslant 0$ $(a>0)$ 的解集	$x_1\leqslant x\leqslant x_2$	$x=-\frac{b}{2a}$	$\varnothing$
$ax^2+bx+c\geqslant 0$ $(a>0)$ 的解集	$x\leqslant x_1$ 或 $x\geqslant x_2$	R	R

例题解析

例 4 求不等式 $x^2-x>6$ 的解集

解：化为一般式： $x^2-x-6>0$

解方程 $x^2-x-6=0$

$\because\ x^2-x-6=(x+2)(x-3)=0$

$\therefore\ x_1=-2,\quad x_2=3$

作图：

$\therefore$ 不等式的解集为：

$x<-2$ 或 $x>3$

◆ 利用同解不等式组求解

① 基本思想：

利用多项式的因式分解，将一元二次不等式转化成同解的两个一元一次不等式组来求解

② 步骤：

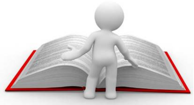
◆ 将一元二次不等式化为一般形式

◆ 将左侧二次三项式因式分解

◆ 写出原不等式的两个同解不等式组

◆ 求解两个不等式组，并将它们的解集合并起来

◆ 作图，写出解集



例题解析

例 5 求不等式 $-2x^2+x\geqslant-1$ 的解集

解：化为一般式：$2x^2-x-1\leqslant0$

$\because\ 2x^2-x-1=(x-1)(2x+1)\leqslant0$

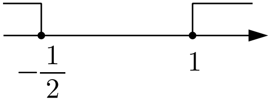
$\therefore$ 原不等式同解于：

$$\begin{cases}x-1\geqslant0\\2x+1\leqslant0\end{cases}\text{或}\begin{cases}x-1\leqslant0\\2x+1\geqslant0\end{cases}$$

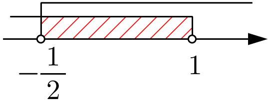
解不等式组得：

$$\begin{cases}x\geqslant1\\x\leqslant-\dfrac{1}{2}\end{cases}\text{或}\begin{cases}x\leqslant1\\x\geqslant-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

作图：



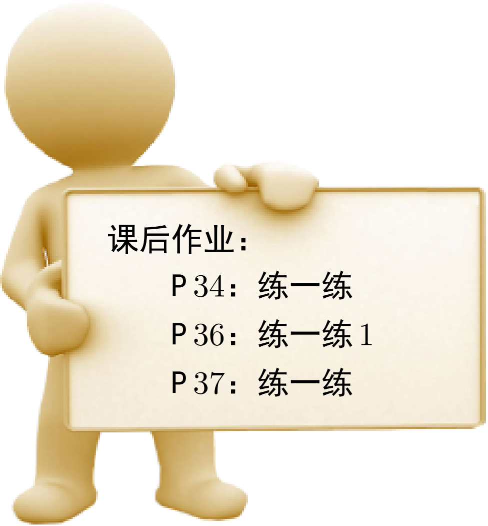
$\therefore$ 第一个方程组的解集为： $\varnothing$

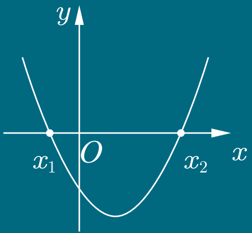


$\therefore$ 第二个方程组的解集为： $-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$

$\therefore$ 原一元二次不等式的解集为：

$$-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$$

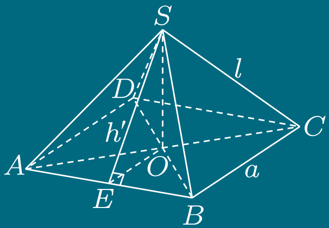

课后作业：
P 34：练一练
P 36：练一练 1
P 37：练一练



§2 方程与不等式

综合练习

$$f(x)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x)$$



一、填空题

1、已知 $4x^{2n}-5+5=0$ 是关于 x 的一元一次方程，则 $n=$ $\underline{\quad \frac{1}{2} \quad}$.

2、若 $x=-1$ 是方程 $2x-3a=7$ 的解，则 $a=$ $\underline{\quad -3 \quad}$.

3、已知 x 与 x 的 3 倍的和比 x 的 2 倍少 6，列出方程为 $\underline{\quad x+3x+6=2x \quad}$.

4、某地开展植树造林活动，两年内植树面积由 3×10^5 m^2 增加到 4.2×10^5 m^2，若设植树面积年平均增长率为 x，根据题意列方程 $\underline{\quad 3\times10^5\times(1+x)^2=4.2\times10^5 \quad}$.

5、关于 x 的方程 $(m-4)x^2+(m+4)x+2m+3=0$，当 $m\underline{\quad \neq 4 \quad}$ 时，该方程是一元二次方程，当 $m\underline{\quad =4 \quad}$ 时，该方程是一元一次方程．

6、用符号“$>$”或“$<$”填空：

(1) $\sqrt{2}\underline{\ >\ }1.414$　(2) $2+\sqrt[3]{7}\underline{\ <\ }4$

(3) 设 $a>b$，$-5a\underline{\ <\ }-5b$

(4) 设 $a<b$，则 $a+3\underline{\ <\ }b+3$，

$1-a\underline{\ >\ }1-b$，

$a-1\underline{\ <\ }b+1$.

7、某品牌方便面包装袋上标有“面饼净含量 $85\,g \pm 5\,g$”，则该食品的合格净含量范围是 $\underline{80\sim 90g}$.

8、方程 $(x-1)(2x+1)=2$ 化成一般形式是 $\underline{2x^2-x-3=0}$，它的二次项系数是 $\underline{\quad 2 \quad}$.

9、若方程 $kx^2-9x+8=0$ 的一个根为 1，则 $k=\underline{\quad 1 \quad}$，另一个根为 $\underline{\quad 8 \quad}$.

10、若方程 $x^2-3x+m=0$ 有两个相等的实数根，则 $m=\underline{\quad \frac{9}{4} \quad}$，相等的实数根为 $\underline{\quad \frac{3}{2} \quad}$.

11、若方程 $x^2+px+q=0$ 的两个根是 -2 和 3，则 p， q 的值分别为 $\underline{\quad -1 \quad}$ 和 $\underline{\quad -6 \quad}$.

12、已知 $a>b>c$，当 $c<0$ 时， $\dfrac{a}{c}\underline{\quad < \quad}\dfrac{b}{c}$， $a+c\underline{\quad > \quad}b+c$.(填“>”或“<”)

二、选择题

1、方程 $m+x=1$ 和 $3x-1=2x+1$ 有相同的解，则 m 的值为 (D)

A. 0　　B. 1　　C. -2　　D. -1

2、方程 $(a-1)x^2-ax+1=0$ 是一元二次方程，则 a 不等于 (B)

A. 2　　B. 1　　C. ±1　　D. -1

3、在梯形面积公式 $S=\frac{1}{2}(a+b)h$ 中，已知 $h=6cm$，$a=3cm$，$S=24cm^2$，则 $b=$ (B) cm

A. 1　　B. 5　　C. 3　　D. 4

4、在平面直角坐标系中，若点 $P(m-3,m+1)$ 在第二象限，则 m 的取值范围为 (A)

A. $-1<m<3$　　B. $m>3$

C. $m<-1$　　D. $m>-1$

5、已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-2x-m=0$ 有两个不相等的实数根，则实数 m 的取值范围是 （ D ）

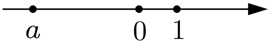
$A.\ m<0$　　$B.\ m<-2$

$C.\ m\geqslant 0$　　$D.\ m>-1$

6、实数 a 在数轴上对应的点如图所示，则 a，$-a$，1的大小关系正确的是 （ D ）

$A.\ -a<a<1$　　$B.\ a<-a<1$

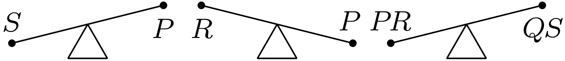
$C.\ 1<-a<a$　　$D.\ a<1<-a$



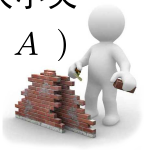
7、四个小朋友玩跷跷板，他们的体重分别为 P，Q，R，S，如图所示，则他们的体重大小关系是 （ D ）

A. $P>R>S>Q$　　B. $Q>S>P>R$

C. $S>P>Q>R$　　D. $S>P>R>Q$



8、若 $2a+3b-1>3a+2b$，则 a，b 的大小关系为 （ A ）

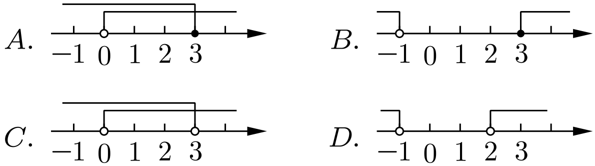


$A.\ a<b$　　$B.\ a>b$　　$C.\ a=b$　　$D.$ 不确定

9、不等式$3x-5<3+x$的正整数解有（ C ）

$A.$ 1个　　$B.$ 2个　　$C.$ 3个　　$D.$ 4个

10、在数轴上表示不等式组$\begin{cases}x>0\\2x-6\leqslant 0\end{cases}$的解集，如图所示，正确的是（ A ）



三、解答题

1、一条环形跑道长 $400m$，甲练习骑自行车，平均速度是 $550m/min$；乙练习赛跑，平均速度是 $250m/min$. 两人同时同地同向出发，经过多少时间，两人首次相遇？

解：设经过 $x\ \ min$ 后两人首次相遇，则

$$250x+400=550x$$

$$\therefore\ \ x=\frac{4}{3}\ \ min=1\ \ min\ \ 20\ \ s$$

答：$1min20s$ 后两人首次相遇。

2、学生李明将2000元人民币按一年定期存入银行，到期后支取1000元用于生活费用支出，剩下的1000元及应得利息又全部按一年定期存入银行，若存款的利率不变，且不考虑利息税，到期后本息共计1320元。若设年利率为x，根据题意列方程并求解。

解：$[2000(1+x)-1000](1+x)=1320$

$$\Rightarrow 2000x^2+3000x-320=0$$

$$\Rightarrow 50x^2+75x-8=0$$

$$\Rightarrow x^2+\frac{3}{2}x-\frac{8}{50}=0$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{-\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{32}{50}}}{2}$$

$$= \frac{-\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{225+64}{100}}}{2}$$

$$= \frac{-\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{289}{100}}}{2}$$

$$= \frac{-\frac{3}{2} \pm \frac{17}{10}}{2}$$

$\therefore \ x_1 = \frac{1}{10}$， $x_2 = -\frac{8}{5}$（舍去）

3、某建材城销售一种成本为每件40元的装修材料，据市场分析，若按每件50元销售，一个月能售出500件；销售单价每涨1元，月销售量就会减少10件，商店想在月销售成本不超过1万元的情况下，使得月销售利润达到8000元，销售单价应定为多少？

解：设销售单价应定为x元，则此时

销售量：$500-10(x-50)=1000-10x$

利润：$(1000-10x)(x-40)$

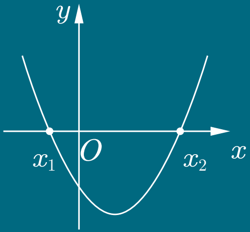
成本：$40(1000-10x)$

$$\therefore \begin{cases} 40(1000-10x) \leqslant 10000 \\ (1000-10x)(x-40)=8000 \end{cases}$$

化简得：$\begin{cases} x \geqslant 75 \\ x=60 \text{ 或 } x=80 \end{cases}$

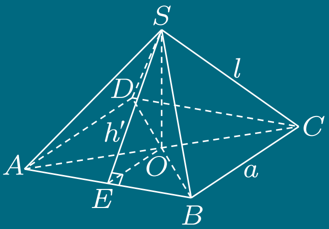
$\therefore\ x=80$（元）

§3 函数



3.1 平面直角坐标系

$$f(x)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x)$$



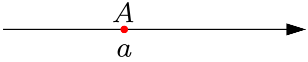
一、确定一点位置的方法

1、直线上的点

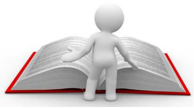
直线 $\xrightarrow{\text{数学抽象}}$ 数轴

数轴上的一个点 $\overset{\text{表示}}{\Longleftrightarrow}$ 一个实数（坐标）

例如：



$$A \Leftrightarrow a \quad (a \in R)$$

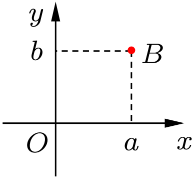


2、平面上的点

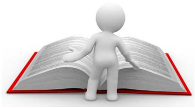
平面 $\xrightarrow{\text{数学抽象}}$ 坐标平面

坐标平面上的一个点 $\overset{\text{表示}}{\Longleftrightarrow}$ 两个实数（坐标）

例如：



$$B \Leftrightarrow (a,b) \quad (a,b \in R)$$

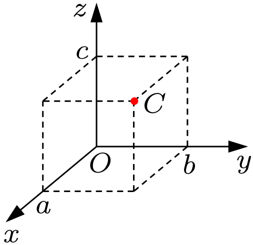


3、空间内的点

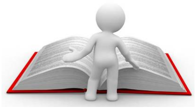
空间 $\xrightarrow{\text{数学抽象}}$ 坐标空间

坐标空间内的一个点 $\overset{\text{表示}}{\Longleftrightarrow}$ 三个实数(坐标)

例如：



$$C \Leftrightarrow (a,b,c) \quad (a,b,c \in R)$$



二、平面直角坐标系

1、坐标系

(1) 概念:

用来唯一地表示某一范围内每一个点的具体位置的方法。

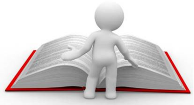
(2) 分类:

根据点所在范围的不同，常见的坐标系有:

直线坐标系、平面坐标系

、柱面坐标系、球面坐标系

、空间坐标系等等。



2、坐标

用来表示某一点在某一范围内具体位置的唯一的一个或一组有顺序的数字叫做该点在该坐标系下的坐标。

3、平面直角坐标系

在同一平面内相互垂直且有公共原点的两条数轴构成了平面直角坐标系，简称直角坐标系。

4、坐标轴

构成平面直角坐标系的两条数轴分别叫做：横轴和纵轴，统称坐标轴。

◇ 横轴　x 轴：水平放置，取向右为正方向

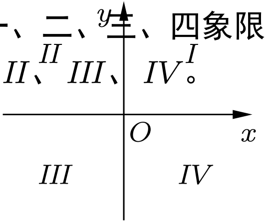
◇ 纵轴　y 轴：铅直放置，取向上为正方向

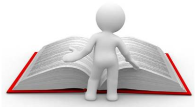
◇ 横轴和纵轴的公共原点叫做直角坐标系的原点。

5、象限

平面直角坐标系下，横轴和纵轴将坐标平面分割成四个区域，从右上方开始，按逆时针顺序依次命名为：第一、二、三、四象限

简记作：I、II、III、IV。





作图：

6、平面坐标

坐标平面内一点 $\xleftrightarrow{\text{一一对应}}$ 有序实数对 (x,y)

这个有序实数对 (x,y) 就称为这个点在该平面直角坐标系下的坐标。

x 叫做该点的横坐标； y 叫做该点的纵坐标

◇ 应用

(1) 已知一点 A，求坐标

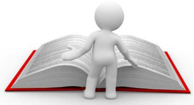
方法：

①过点 A 分别作 x、 y 轴的垂线，垂足为 M、N

②求 M 在 x 轴上的坐标为 x

N 在 y 轴上的坐标为 y

③按顺序写出 (x,y)



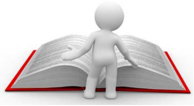
（2）已知一点坐标 (x,y)，描点

方法：

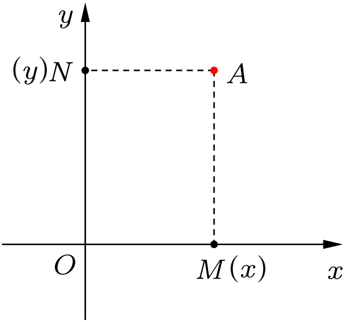
①在 x 轴上找到坐标为 x 的点 M，在 y 轴上找到坐标为 y 的点 N

②分别过 M 和 N 点作 x 轴和 y 轴的垂线

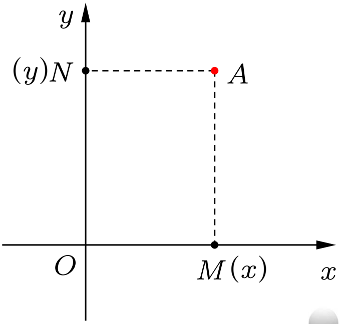
③做两条垂线的交点 A，即为所求

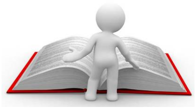


已知点，求坐标



已知坐标，描点





三、坐标平面上不同点的坐标特征

1、坐标轴上的点

(1) x 轴上的点的纵坐标为 0

(2) y 轴上的点的横坐标为 0

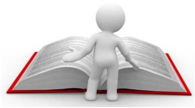
例1　已知点 $P(a-1, a^2-9)$ 在 x 轴的负半轴上，则点 P 的坐标为多少？

解：$\because$ 点 P 在 x 轴上

$\therefore$ $a^2-9=0$，即 $a=\pm 3$

当 $a=3$ 时，点 P 坐标为 $(2,0)$（舍去）

当 $a=-3$ 时，点 P 坐标为 $(-4,0)$



2、不同象限内的点

(1) 点 $P(x,y)$ 在第一象限

$$x>0,\quad y>0$$

(2) 点 $P(x,y)$ 在第二象限

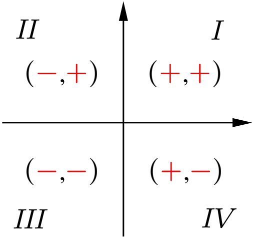
$$x<0,\quad y>0$$

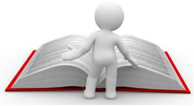
(3) 点 $P(x,y)$ 在第三象限

$$x<0,\quad y<0$$

(4) 点 $P(x,y)$ 在第四象限

$$x>0,\quad y<0$$





例2 已知 $A(-2,0)$，$B(4,0)$，$C(x,y)$

(1) 若点 C 在第二象限，且 $|x|=4$，$|y|=4$，求点 C 的坐标

(2) 求 $\triangle ABC$ 的面积

解：(1) $\because$ 点 C 在第二象限

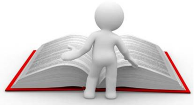
$\therefore$ $x<0$，$y>0$

$\therefore$ $x=-4$，$y=4$，即 $C(-4,4)$

(2) 由题意知：

底 $4-(-2)=6$，高 $4-0=4$

$$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 6\times 4=12$$



3、坐标轴夹角平分线上的点

（1）一三象限角平分线上的点横纵坐标相同

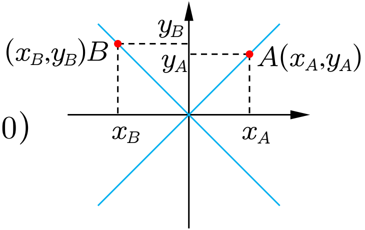
（2）二四象限角平分线上的点横纵坐标互为相反数

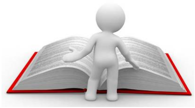
如图：

$x_A = y_A$

$x_B = -y_B$（或 $x_B + y_B = 0$）

$|x_A| = |y_A|, |x_B| = |y_B|$





例3 已知点 $A(-4,a)$ 在第三象限的角平分线上，则 A 的值为多少？

解：由题意知，点 A 的横纵坐标相等

$\therefore\ a=-4$

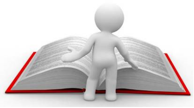
4、平行于坐标轴的直线上的点

(1) 平行于 x 轴的直线上的点

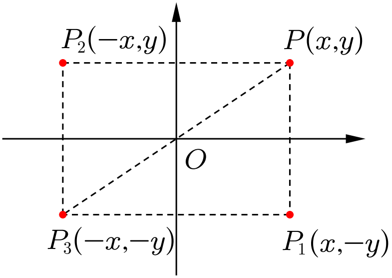
—— 纵坐标相等

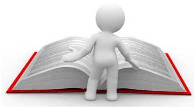
(2) 平行于 y 轴的直线上的点

—— 横坐标相等



5、关于坐标轴、原点对称的点





结论：

(1) 关于 x 轴对称的点

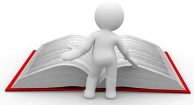
—— 横坐标相同，纵坐标互为相反数

(2) 关于 y 轴对称的点

—— 纵坐标相同，横坐标互为相反数

(3) 关于原点对称的点

—— 横、纵坐标都互为相反数

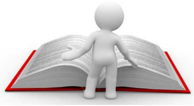


例4 已知点 $P(2a-3,3)$ 和点 $A(-1,3b+2)$ 关于 x 轴对称，那么 $a+b$ 的值是多少？

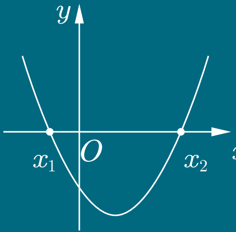
解：由题意知，点 P 和点 A 横坐标相同，纵坐标互为相反数

$$\therefore \begin{cases} 2a-3=-1 \\ 3b+2=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-\dfrac{5}{3} \end{cases}$$

$$\therefore a+b=1-\frac{5}{3}=-\frac{2}{3}$$



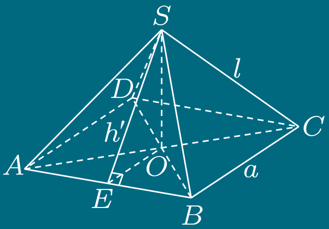

课后作业：
P 47：练一练
做到课本上



§3 函数

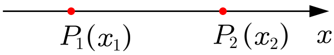
3.2 平面内两点间的距离公式及中点公式

$$f(x)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x)$$



一、平面内两点间的距离公式

1、数轴上两点间的距离公式



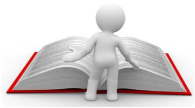
分析：

若 $x_1,x_2>0$，则 $|P_1P_2|=x_2-x_1=|x_2-x_1|$

若 $x_1,x_2<0$，则 $|P_1P_2|=||x_1|-|x_2||$

$$=|-x_1+x_2|$$

$$=|x_2-x_1|$$



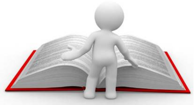
若 $x_1 < 0, x_2 > 0$，则 $|P_1P_2| = |x_2 + |x_1||$

$$= |x_2 - x_1|$$

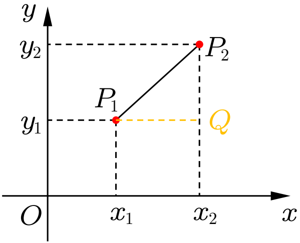
性质：

数轴上两点间的距离等于这两个点的坐标的差的绝对值。

即：$|P_1P_2| = |x_2 - x_1| = |x_1 - x_2|$



2、平面上任意两点间的距离公式

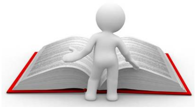


性质：

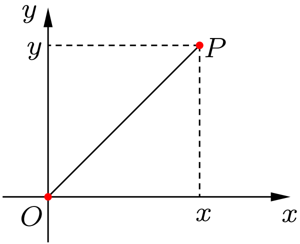
$$|P_1Q| = |x_2 - x_1|、\quad |QP_2| = |y_2 - y_1|$$

$$|P_1P_2| = \sqrt{|P_1Q|^2 + |QP_2|^2}$$

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

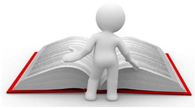


推广（特殊情况）



性质：

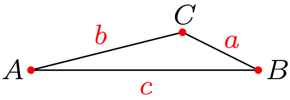
$$\begin{aligned}|PO| &= \sqrt{(0-x)^2+(0-y)^2} \\ &= \sqrt{x^2+y^2}\end{aligned}$$



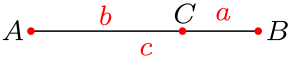
3、两点间距离公式的常见应用

(1) 证明三点共线

原理：



$a+b>c$

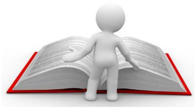


$a+b=c$

方法：

① 先利用两点间距离公式求三点两两之间的距离

② 判断三个距离之间的关系



◇ 若有两个距离之和等于第三个距离

—— 三点共线

◇ 反之

—— 三点不共线

例1 试证明 $M(1,3)$、$N(0,1)$、$P(-3,-5)$ 在同一条直线上

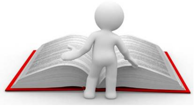
证：$|MN|=\sqrt{(0-1)^2+(1-3)^2}=\sqrt{5}$

$|MP|=\sqrt{(-3-1)^2+(-5-3)^2}=4\sqrt{5}$

$|NP|=\sqrt{3^2+6^2}=3\sqrt{5}$

显然：$|MN|+|NP|=|MP|$

$\therefore$ M、N、P 三点共线



（2）判断三角形的形状

原理：

根据三角形三边长度，判断简单三角形的形状

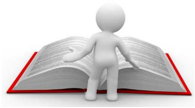
方法：

① 先利用两点距离公式求出三角形三边长度

② 若两条边相等 —— 等腰三角形

若三条边相等 —— 等边三角形

若满足勾股定理 —— 直角三角形



例 2 已知：点 $A(1,2)$，$B(3,4)$，$C(5,0)$

求证：$\triangle ABC$ 是等腰三角形

证：$|AB| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

$|AC| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{5}$

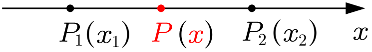
$|BC| = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = 2\sqrt{5}$

$\therefore\ |AC| = |BC|$

即：$\triangle ABC$ 是等腰三角形

二、平面内两点（线段）中点公式

1、数轴上两点（线段）的中点公式



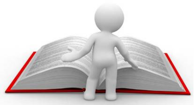
分析：

当 $x_1 < x < x_2$ 时：$x - x_1 = x_2 - x$

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

当 $x_2 < x < x_1$ 时：$x - x_2 = x_1 - x$

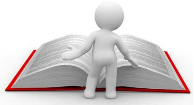
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$



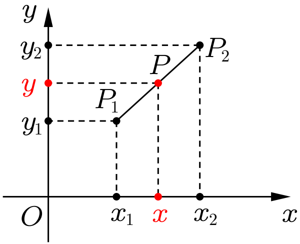
性质：

数轴上两点中点坐标是这两点坐标的算术平均数

即：$x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$



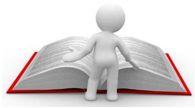
2、平面上两点（线段）的中点公式



性质：

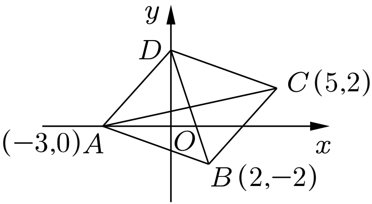
平面上两点中点的横纵坐标是这两点横纵坐标的算术平均数

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\ y=\frac{y_1+y_2}{2}$$



例3 已知：如图所示，$\square ABCD$ 的三个顶点坐标依次是 $A(-3,0)$，$B(2,-2)$，$C(5,2)$

求：顶点 D 的坐标



分析：对角线 AC 和 BD 有相同的中点

解：设平行四边形中心为 $E(x_0,y_0)$， D 点坐标为 (x,y)

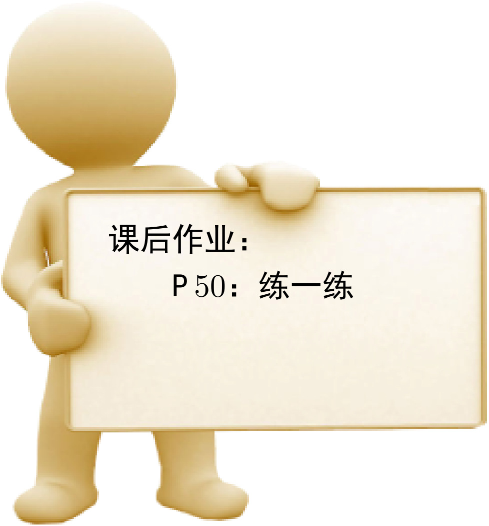
$\because$ 点 E 是线段 AC 的中点

$$\therefore\ x_0=\frac{-3+5}{2}=1,\quad y_0=\frac{0+2}{2}=1$$

$$\therefore\ x_0=\frac{2+x}{2}=1\Rightarrow x=0$$

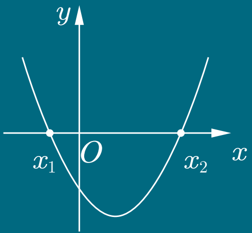
$$y_0=\frac{-2+y}{2}=1\Rightarrow y=4$$

$\therefore$ 顶点 D 的坐标为 $(0,4)$

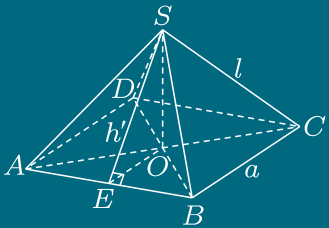

课后作业：
P 50：练一练

§3 函数

3.3 函数基本知识



$$f(x)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x)$$



一、函数及其相关概念

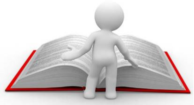
1、变量和常量

概念

在某一变化过程中，可以取不同数值的量叫做变量，保持不变的量叫做常量。

注意：

变量和常量是相对的，在不同的变化过程中有些是可以相互转化的。



2、函数

一般定义：

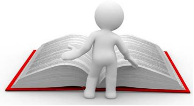
在某一变化过程中有两个变量x、y，如果对于x的每一个值，y都有唯一的值与它对应，那么就说x是自变量，y是因变量，y是x的函数。

简而言之：

函数是两个相互依存的变量之间的一种因果对应关系。

3、函数解析式(关系式)

用来表示函数关系的数学式子



4、定义域（自变量的取值范围）

（1）概念：

使函数有意义的自变量的取值的全体

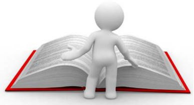
（2）求函数定义域的常见原则

◆ 当关系式是整式时

——定义域是全体实数 R

◆ 当关系式含有分式时

——定义域是使分母不为 0 的实数



- 当关系式含有偶次根式时

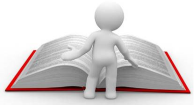
——定义域是使被开方数不小于 0 的实数

- 当关系式表示实际问题时

——定义域必须使实际问题有意义

5、值域

函数值的取值范围

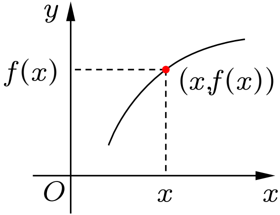


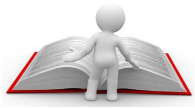
6、函数的图象

概念

对于一个函数 $y=f(x)$，把自变量 x 和函数 y 的每一对对应值分别作为点的横坐标和纵坐标，在坐标平面内描出相应的点，这些点所组成的图形，就是这个函数 $y=f(x)$ 的图象。

如图：





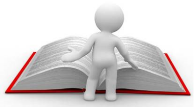
二、函数的表示方法

1、列表法

用列表的形式表示自变量与因变量之间的对应关系

例如：

x	x_1	x_2	x_3	x_4	$\cdots$
$y=f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	$f(x_4)$	$\cdots$

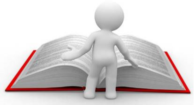


2、解析(式)法

用解析式（表达式）表示自变量与因变量之间的对应关系

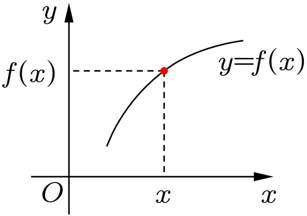
即：$y=f(x)$

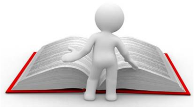
如：$y=ax^2+bx+c$



3、图象法

用曲线（图象）上的点表示自变量与因变量之间的对应关系

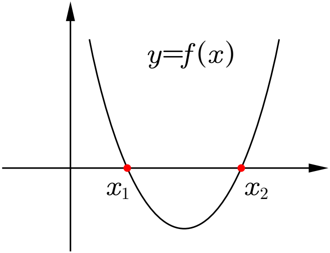


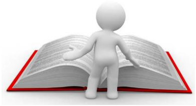


三、方程、不等式的解与函数的关系

1、方程的解与函数的关系

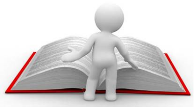
方程 $f(x)=0$ 的解（根），就是使函数值 $y=f(x)=0$ 的所有自变量 x 的取值，即曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴的交点的横坐标





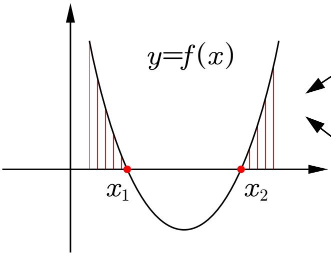
2、不等式的解(集)与函数的关系

不等式 $f(x)>0$ 的解集，就是使函数值 $y=f(x)>0$ 的所有自变量 x 的取值，即曲线 $y=f(x)$ 在 x 轴之上的部分对应的 x 的取值



如图所示：

以二次函数 $y=f(x)=ax^2+bx+c$ 为例

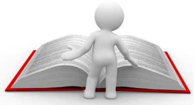


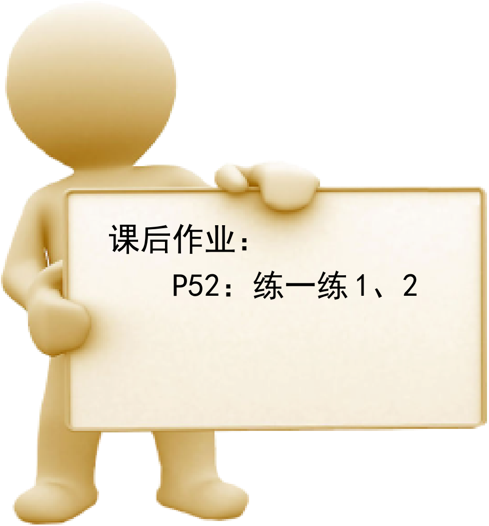
方程 $f(x)=0$ 的解为：

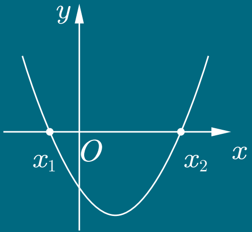
$x=x_1$ 或 $x=x_2$

不等式 $f(x)>0$ 的解集为：

$x<x_1$ 或 $x>x_2$



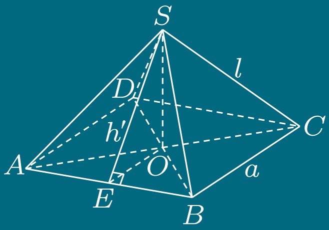

课后作业：
P52：练一练 1、2



§3 函数

3.4-3.6 几种常见函数

$$f(x)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x)$$



一、(3.4)一次函数

1、相关概念

(1)一次函数

如果 $y=kx+b$(k、b 为常数，$k\neq 0$)，则称 y 是 x 的一次函数。

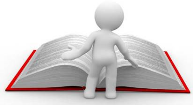
(2)正比例函数

一次函数当常数项为 0($b=0$) 时，即 $y=kx$($k\neq 0$) 时，称 y 是 x 的正比例函数。

(3)一次函数与正比例函数的关系

◇ 一次函数包括正比例函数

◇ 正比例函数是一次函数的特殊情况



2、图象

(1) 形式

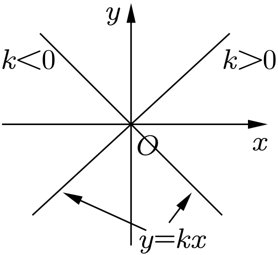
◇ 一次函数的图象是一条直线

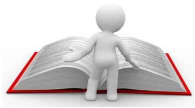
① 正比例函数 $y=kx(k\neq 0)$

◇ 图象是一条经过原点(0, 0)的直线。

◇ 当 $k>0$ 时，直线经过一、三象限。

◇ 当 $k<0$ 时，直线经过二、四象限。



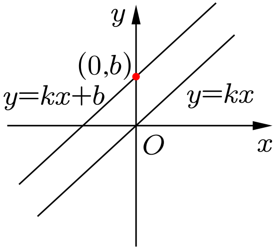


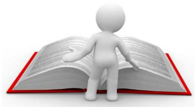
② 一次函数 $y=kx+b(k\neq 0)$

◇ 图象是一条经过点 $(0,b)$ 且平行于正比例函数 $y=kx$ 的直线。

◇ 一次函数 $y=kx+b(k\neq 0)$ 的图象与 y 轴的交点是 $(0,b)$

◇ b 叫做一次函数的图象在 y 轴上的截距。





(2) 画法

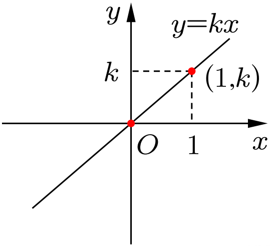
◆ 基本思路

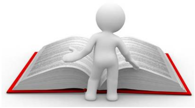
因为两点即可以确定一条直线，所以只需描出直线上的两个点，再做连接两点的直线即可。

◆ 具体做法

① 正比例函数 $y=kx$ 的图象

可以选取 $(0,0)$ 和 $(1,k)$ 两个点

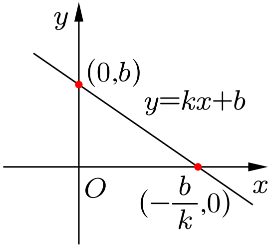


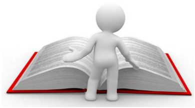


② 一次函数 $y=kx+b$ 的图象

可以选取图象与两个坐标轴的交点

即 $(-\dfrac{b}{k},0)$ 和 $(0,b)$ 两个点





3、性质

(1) 一次函数 $y=kx+b(k\neq 0)$

◇ 当 $k>0$ 时，y 随着 x 的增大而增大

◇ 当 $k<0$ 时，y 随着 x 的增大而减小

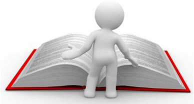
(2) 正比例函数 $y=kx(k\neq 0)$

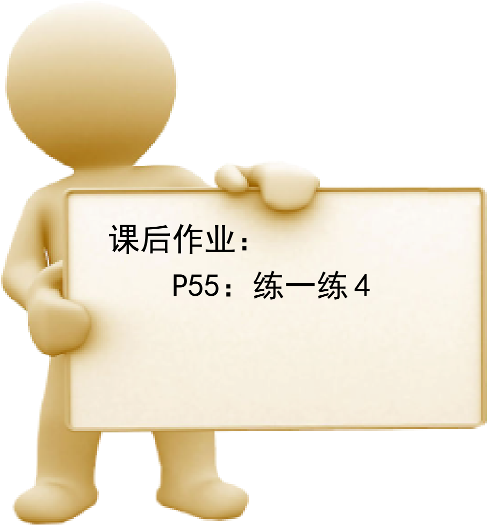
◇ 具有一次函数的所有性质

◇ 当 $k>0$ 时，图象经过一、三象限

◇ 当 $k<0$ 时，图象经过二、四象限

(3) 一次函数 $y=kx+b(k\neq 0)$ 的图象可以由正比例函数 $y=kx(k\neq 0)$ 的图象向上 $(b>0)$ 或向下 $(b<0)$ 平移 $|b|$ 个单位而得到。




课后作业：
P55：练一练 4

二、(3.5)反比例函数

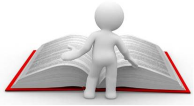
1、定义

如果 $y=\dfrac{k}{x}$(k 为常数，$k\neq 0$)，则称 y 是 x 的反比例函数

2、图象

(1)形式

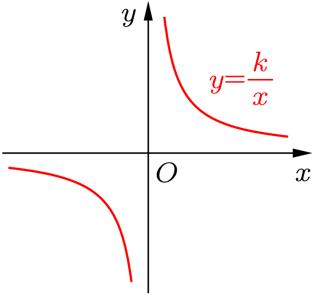
反比例函数的图象是一条双曲线，有两个分支

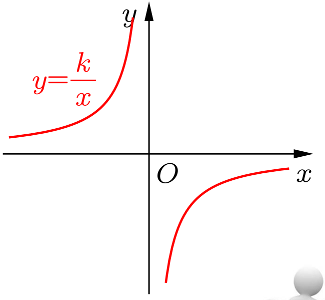


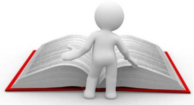
如图：

当 $k>0$ 时 当 $k<0$ 时

双曲线位于一、三象限 双曲线位于二、四象限







(2) 画法

① 当 $k>0$ 时，图象在一、三象限

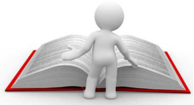
当 $k<0$ 时，图象在二、四象限

② 当 $k=1$ 时，图象经过点 $(1,1)$ 和 $(-1,-1)$

当 $k=-1$ 时，图象经过点 $(-1,1)$ 和 $(1,-1)$

③ $|k|$ 越小，图象（双曲线）距离原点越近

$|k|$ 越大，图象（双曲线）距离原点越远



3、性质

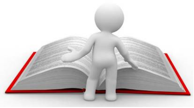
(1) 当 $k>0$ 时，在每个象限内 y 随着 x 的增大而减小。

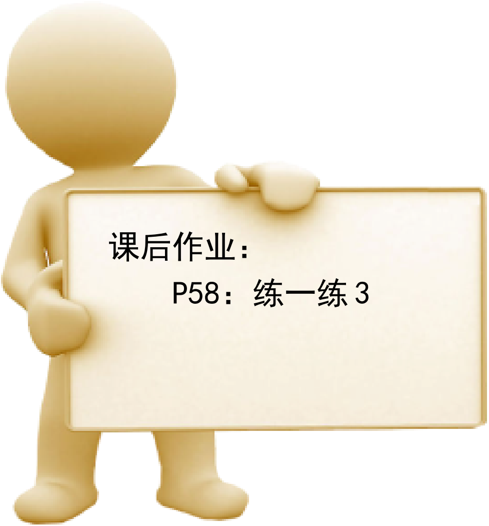
注意：

不能说：在整个定义域上 y 随着 x 的增大而减小。

(2) 当 $k<0$ 时，在每个象限内 y 随着 x 的增大而增大。

(3) 图象性质




课后作业：
P58：练一练 3

三、(3.6)二次函数

1、定义

如果 $y=ax^2+bx+c$(a、b、c 为常数，$a\neq 0$)，则称 y 是 x 的二次函数。

2、图象

(1)形式

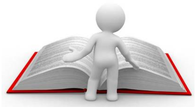
◆ 二次函数的图象是一条抛物线。

抛物线一般从三个方面加以描述：

◇ 开口方向

◇ 顶点位置

◇ 对称轴方程



◆ 几种特殊的二次函数图象

◇ $y=ax^2$

开口方向：

$a>0$时，开口向上

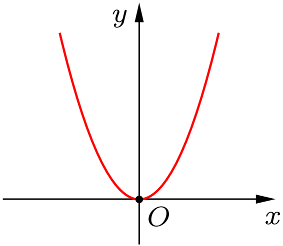
$a<0$时，开口向下

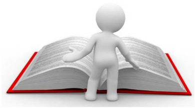
顶点位置：

$(0,0)$

对称轴方程：

$x=0$





◇ $y=ax^2+k$

开口方向：

$a>0$时，开口向上

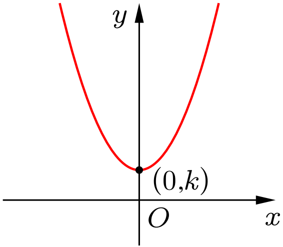
$a<0$时，开口向下

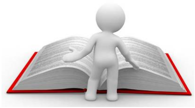
顶点位置：

$(0,k)$

对称轴方程：

$x=0$





◇ $y = a(x-h)^2$

开口方向：

$a>0$时，开口向上

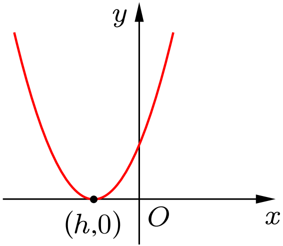
$a<0$时，开口向下

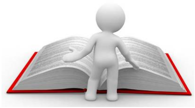
顶点位置：

$(h,0)$

对称轴方程：

$x=h$





◇ $y=a(x-h)^2+k$

开口方向：

$a>0$时，开口向上

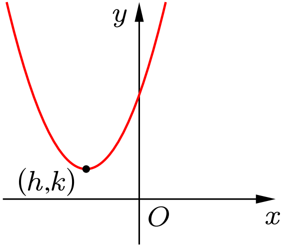
$a<0$时，开口向下

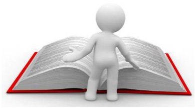
顶点位置：

(h,k)

对称轴方程：

$x=h$





◇ $y=ax^2+bx+c$

开口方向：

$a>0$时，开口向上

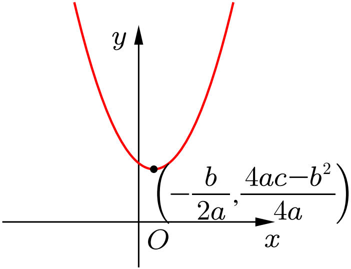
$a<0$时，开口向下

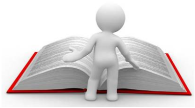
顶点位置：

$$\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$$

对称轴方程：

$$x=-\frac{b}{2a}$$





◇ 结论

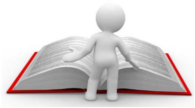
① $y=ax^2$的图象（抛物线）的开口由a确定：

$a>0$，开口向上；

$a<0$，开口向下；

$|a|$越大，抛物线开口越小。

② 二次函数$y=ax^2$、$y=ax^2+k$、$y=a(x-h)^2$、$y=a(x-h)^2+k$、$y=ax^2+bx+c$的图象形状完全相同，只是位置不同。



③ $y=a(x-h)^2+k$ 的图象可以由 $y=ax^2$ 的图象先向上 $(k>0)$ 或向下 $(k<0)$ 平移 $|k|$ 个单位，再向右 $(h>0)$ 或向左 $(h<0)$ 平移 $|h|$ 个单位而得到。

④ $y=ax^2+bx+c$

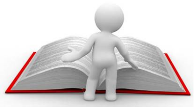
$$\xlongequal{\text{配方}} a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$$

(2) 画法

以 $y=a(x-h)^2+k$ 为例

① 确定顶点位置——(h,k)

② 判断开口方向——$(a>0$ 或 $a<0)$



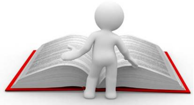
3、性质

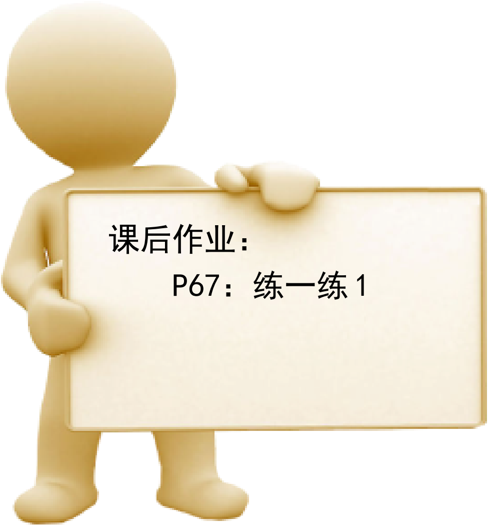
(1) 当 $a>0$ 时，在抛物线对称轴的左侧，y 随着 x 的增大而减小；在对称轴的右侧，y 随着 x 的增大而增大。抛物线的顶点是图象的最低点，故顶点的函数值是函数值的最小值。

(2) 当 $a<0$ 时，在抛物线对称轴的左侧，y 随着 x 的增大而增大；在对称轴的右侧，y 随着 x 的增大而减小。抛物线的顶点是图象的最高点，故顶点的函数值是函数值的最大值。

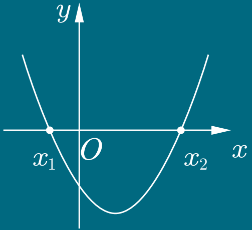
(3) 抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 与 y 轴的交

点是$(0,c)$， c叫做抛物线在y轴上的截距。



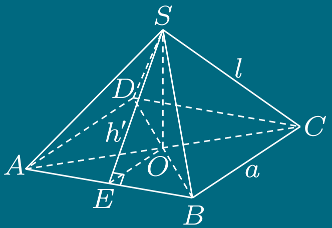

课后作业：
P67：练一练 1

§3 函数



综合练习

$$f(x)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x)$$



一、选择题

1、实数 x， y 满足 $(x-1)^2+|y|=0$，则点 $P(x,y)$ 在　　　　(B)

$A.$ 原点　　　　$B.x$ 轴正半轴

$C.$ 第一象限　　　　$D.$ 任意位置

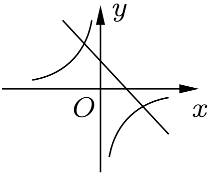
2、若点 M 的坐标是 (a,b)，且 $a>0$， $b<0$，则点 M 在　　　　(D)

$A.$ 第一象限　　　　$B.$ 第二象限

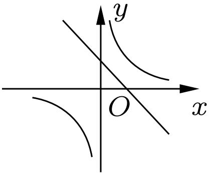
$C.$ 第三象限　　　　$D.$ 第四象限

3、如图所示，函数 $y=kx+1$ 与函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 在同一平面直角坐标系中的大致图象是　　　　(A)

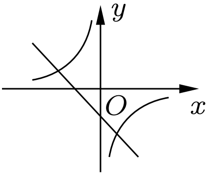
$A.$



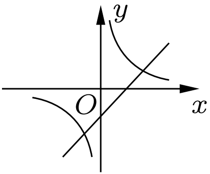
$B.$



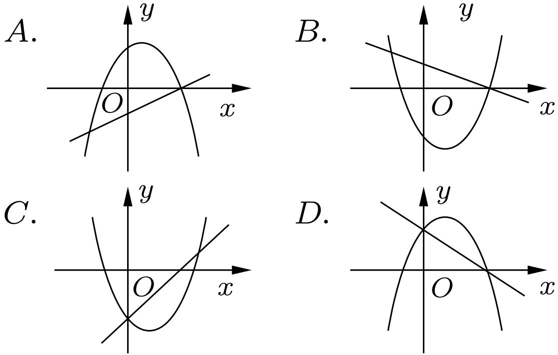
$C.$



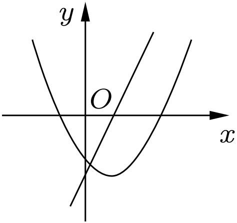
$D.$



4、如图是在同一平面直角坐标系内，二次函数 $y=ax^2+(a+c)x+c$ 与一次函数 $y=ax+c$ 的大致图象，而且只有一个是正确的，正确的是 (D)



5、函数 $y=ax+b$ 与 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图所示，则下列选项中正确的是 (D)



$A.ab>0$，$c>0$

$B.ab<0$，$c>0$

$C.ab>0$，$c<0$

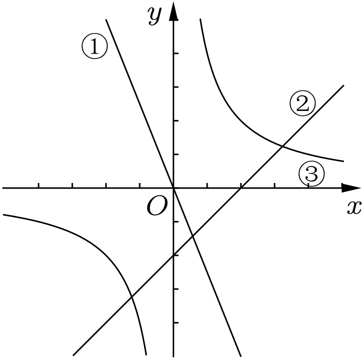
$D.ab<0$，$c<0$

6、抛物线 $y=2(x-1)^2+1$ 的顶点坐标是 (A)

$A.(1,1)$ $B.(1,-1)$

$C.(-1,1)$ $D.(-1,-1)$

7、如图所示，函数图象①②③的表达式应为　　　　　(C)



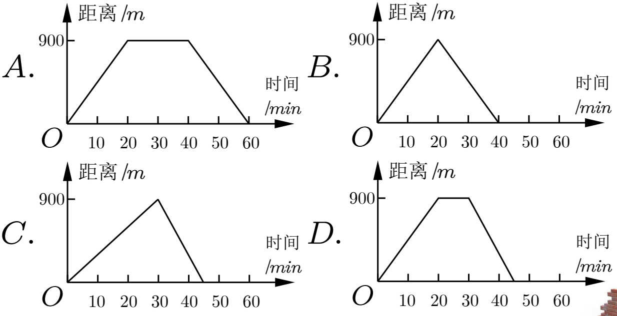
$A.y=-\frac{5}{2}x$，$y=x+2$，$y=-\frac{4}{x}$

$B.y=\frac{5}{2}x$，$y=-x+2$，$y=\frac{4}{x}$

$C.y=-\frac{5}{2}x$，$y=x-2$，$y=\frac{4}{x}$

D. $y=-\frac{5}{2}x$，$y=x-2$，$y=-\frac{4}{x}$

8、张大伯出去散步，从家走了 $20min$，到一个离家 $900m$ 的阅报亭，看了 $10min$ 报纸后，用了 $15min$ 返回到家，下图中哪个图形表示张大伯离家时间与距离之间的关系　　　　(D)



9、二次函数 $y=x^2-2x+2$ 有　　　　(C)

$A.$ 最大值是 1　　　　$B.$ 最大值是 2

$C.$ 最小值是 1　　　　$D.$ 最小值是 2

10、二次函数 $y=x^2-3x+\frac{3}{2}$ 的图象与 x 轴交点的个数是　　　　(C)

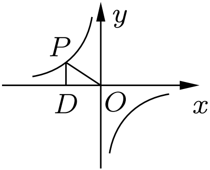
$A.0$　　　　$B.1$

$C.2$　　　　$D.$ 不能确定

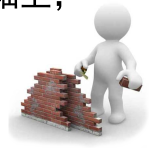
二、填空题

1、过点 $B(-3,-1)$ 作 x 轴的垂线，垂足对应的数是__-3__，过点 B 作 y 轴的垂线，垂足对应的数是__-1__。

2、如图所示，点 P 是反比例函数 $y=-\dfrac{2}{x}$ 上的一点，$PD\perp x$ 轴于点 D，则 $\triangle POD$ 的面积为__1__。



3、若抛物线 $y=x^2-6x+c$ 的顶点在 x 轴上，则 c 的值是__9__。

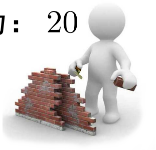


4、二次函数 $y=x^2+(2m+1)x+(m^2-1)$ 有最小值，则 $m=$______。

5、某商场销售一批名牌衬衫，平均每天可售出 20 件，每件可盈利 40 元。为扩大销售量，增加盈利，采取了降价措施，经调查发现如果每件计划降价 1 元，那么商场平均每天可多售出 2 件。若商场平均每天要盈利 1200 元，则每件衬衫应降价__10 或 20 元__。

分析：设应降价 x 元，则

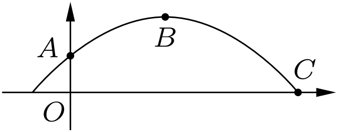
单件商品盈利为：$40-x$ 元，销售数量为：$20+2x$ 件，$\therefore$ 单日盈利 $y=(40-x)(20+2x)$



6、某学生在体育测试时推铅球，铅球所经过的路线是二次函数图象的一部分，如果这名学生出手处为 $A(0,2)$，铅球路线最高处为 $B(6,5)$，则该学生将铅球推出的距离是 $\underline{\ 6+2\sqrt{15}\ }$。

分析：

如图，即求铅球落点 C 的横坐标即可。



注意：舍去负值。

7、二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的图象与 x 轴交点横坐标为 -2，6，图象与 y 轴交点到原点距离为 3，则该二次函数的解析式为 $y=\pm\frac{1}{4}x^2\mp x\mp 3$ 。

分析：

由题意可设函数解析式为

$y=a(x+2)(x-6)=ax^2-4ax-12a$

又 $\because c=-12a=\pm 3$ $\therefore a=\pm\frac{1}{4}$

$\therefore$ 解析式为：

$y=\frac{1}{4}x^2-x-3$ 或 $y=-\frac{1}{4}x^2+x+3$

8、已知函数 $y=\frac{m+1}{x}$ 是反比例函数，则 m 的取值范围为 $\underline{\;m\neq-1\;}$。

三、解答题

1、已知二次函数 $y=x^2+bx+c$ 的图象经过 $A(0,1)$，$B(2,-1)$ 两点

(1) 求 b 和 c 的值；

(2) 试判断点 $P(-1,2)$ 是否在此函数图象上？

解：(1) 将点 $A(0,1),B(2,-1)$ 代入解析式

得：$\begin{cases}1=c\\-1=4+2b+c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=-3\\c=1\end{cases}$

(2) 由 (1) 知函数的解析式为 $y=x^2-3x+1$

将 $P(-1,2)$ 代入得：$1+3+1=5\neq 2$

$\therefore$ 点 P 不着函数的图象上。

2、某商店经营衬衫，已知成批购进时单价是25元。根据市场调查，销售量与销售单价满足如下关系：在一段时间内，单价是135元时，销售量是500件，而单价每降低10元，就可以多售出200件。请你帮助分析，销售单价是多少时，可以获利最多？

解：设单价为x时，获利(利润)最大，则此时

销售额：$$y=\frac{135-x}{10}\cdot 200+500$$
$$=(2700-20x)+500$$
$$=-20x+3200 \quad (x>25)$$

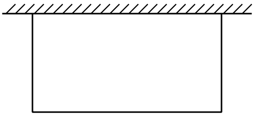
利润：$$z=(x-25)\cdot y$$

$$=(x-25)(-20x+3200)$$

显然，当 $x=\dfrac{25+\dfrac{3200}{20}}{2}=\dfrac{25+160}{2}=92.5$ 元时，z 有最大值

$$z_{max}=(92.5-25)(-1850+3200)=91125\text{ 元}$$

3、如图所示，一边靠校园院墙，另外三边用 $50m$ 长的篱笆，围起一个长方形场地，设垂直院墙的边长为 x m.



(1) 写出长方形场地面积 $y(m^2)$ 与 x 的函数关系

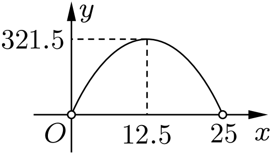
式；

(2) 画出函数的图象

(3) 求边长为多少时，长方形面积最大。最大面积是多少？

解：(1) $y=(50-2x)\cdot x\ \ (0<x<25)$

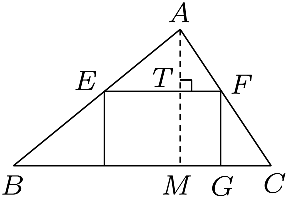
(2)



(3) 显然，当 $x=\dfrac{0+25}{2}=12.5$ 元时，y(长方形面积) 最大

$y_{max} = (50-25)\cdot 12.5 = 312.5$ 元

4、如图所示，有一块底边长为 $20cm$，高为 $16cm$ 的三角形铁皮余料，准备截取一块最大面积的矩形，并使它的一边在三角形的底边上，求截得矩形的长和宽各是多少？



解：设矩形的长 $EF = x$

$\because \triangle AEF \sim \triangle ABC$

$\therefore \dfrac{EF}{AT} = \dfrac{BC}{AM}$ 即 $\dfrac{x}{AT} = \dfrac{20}{16}$

$\therefore AT = \frac{4}{5}x$

$\therefore$ 矩形的宽 $TM = 16 - \frac{4}{5}x$

$\therefore$ 矩形面积 $y = x(16 - \frac{4}{5}x)$ $(0 < x < 20)$

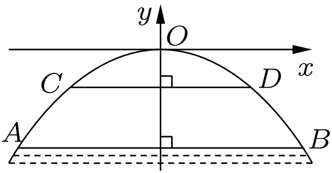
显然当 $x = \frac{0+20}{2} = 10cm$ 时，矩形面积最大

此时，矩形长 $x = 10cm$

矩形宽 $16 - \frac{4}{5}x = 8cm$

矩形面积 $y = 10 \times 8 = 80cm^2$

5、如图所示，有一座抛物线形拱桥，桥下面在正常水位 AB 时宽 $20m$，水位上升 $3m$ 就达到警戒线 CD，这是水面宽度为 $10m$.



(1) 在如图坐标系中求抛物线的解析式；

(2) 若洪水到来时，水位以 $0.2m/h$ 的速度上升，从警戒线开始，再持续多少小时才能到拱桥顶？

解：(1) 设函数的解析式为 $y=ax^2$

则 $B(10,100a)$，$D(5,25a)$

$\because 25a-100a=3$

$\therefore a=-\dfrac{3}{75}$

$\therefore$ 函数的解析式为 $y=-\dfrac{3}{75}x^2$

(2) 由题意知，警戒线距离桥顶的高度为

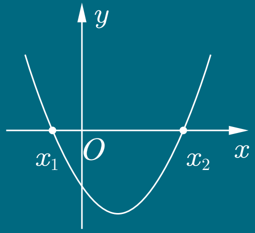
$$|25a|=25\times\frac{3}{75}=1m$$

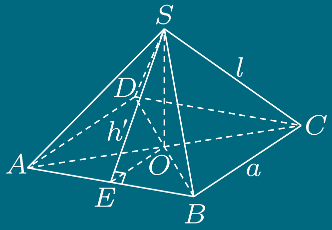
$\therefore \dfrac{1}{0.2}=5h$

即 $5h$ 之后水位将到达桥顶。

§4 平面图形

4.1 线和角





$$f(x)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x)$$

一、几何图形概述

1、几何学

研究几何图形的结构和性质的一门学科。

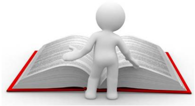
根据研究的对象、方法的不同，常见的有：平面几何、立体(空间)几何、解析几何、微分几何等。

2、平面图形

在同一平面内由点、线(直线或曲线)所组成的图形。

3、立体图形

不在同一平面内由点、线(直线或曲线)、面(平面或曲面)所组成的图形。



4、注意：

(1)点是构成几何图形的最基本的元素。

(2)“点动成线”是指“点”的移动轨迹形成了“线”，即“线”是“点”的轨迹(集合)。

(3)“线动成面”是指“线”(直线或曲线)的移动轨迹形成了“面”(平面或曲面)，即“面”是“线”的轨迹(集合)。

(4)“面动成体”是指“面”(平面或曲面)的移动轨迹形成了“体”，即“体”是“面”的轨迹(集合)。

(5)线(直线或曲线)、面(平面或曲面)、立体都可以看成是点的集合。

二、线

1、直线

(1) 定义

一根拉的很紧的线，给我们以直线的形象。

注意:

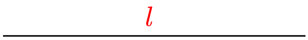
① 直线是一个没有定义的原始概念。

② 直线可以向两个方向无限延伸(没有端点，不可以被度量)。

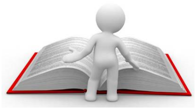
(2) 表示

① 用一个小写字母表示

如图:

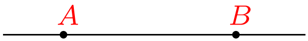


直线 l



② 用直线上两个点对应的字母表示

如图：



直线 AB

(3) 性质

① 直线公理：过两点有且只有一条直线。

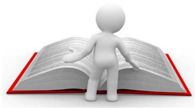
② 经过一点的直线有无穷多条

③ 两条不相同的直线至多有一个公共点

④ 点和直线的位置关系

◇ 点在直线上

◇ 点在直线外



⑤ 平面上两条直线的位置关系

◇ 平行 ——两条直线没有公共点

◇ 相交 ——两条直线有且仅有一个公共点

注意：

“垂直”是两条直线相交的一种特殊情况（所成角为直角），不能把它理解为一种“位置关系”。

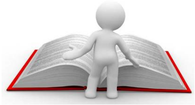
2、射线

(1) 定义

直线上一点和它一边的部分叫做射线。该点叫做射线的端点。

注意：

① 射线是直线的一部分。



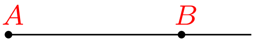
② 射线只有一个端点。

③ 射线可以向一个方向无线延伸（不可以被度量）。

（2）表示

用端点和射线上一点对应的字母表示

如图：



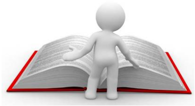
射线 AB

3、线段

（1）定义

直线上两个点和它们之间的部分叫做线段。

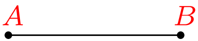
这两个点叫做线段的端点。



(2) 表示

用两个端点对应的字母表示

如图：



线段 AB

(3) 性质

两点之间线段(直线)最短。

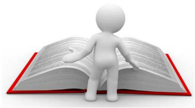
4、特殊的线

(1) 直线的垂线

两条直线垂直时，一条直线叫另一条直线的垂线。

(2) 平行线

两条直线平行时，一条直线叫另一条直线的平行线。



(3) 线段的垂直平分线

① 定义

垂直且平分线段的直线

② 性质

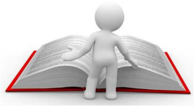
◇ 线段垂直平分线上的点到线段两个端点的距离相等。

◇ 与线段两个端点距离相等的点在线段的垂直平分线上。

(4) 角的平分线

① 定义

从角的顶点出发的，把角分成两个完全相同的角的射线或直线。



② 性质

◇ 角平分线上的点到角的两边的距离相等。

◇ 与角的两边距离相等的点在角的平分线上。

三、角

1、定义

有公共端点的两条射线组成的图形叫做角。

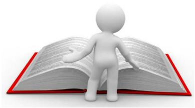
这个公共端点叫做角的顶点，这两条射线叫做角的边。

注意：

(1) 角的大小与边的长短无关，只与构成角的两条射线张开的幅度大小有关。

(2) 角可以被度量(比较大小)。

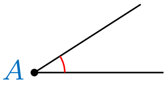
(3) 角可以参与运算。



2、表示

(1) 用一个大写英文字母(顶点)表示

如图：

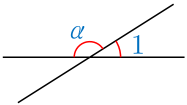


记作：$\angle A$

注意：这种方法常用来表示一个独立的角。

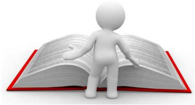
(2) 用一个小写希腊字母或数字表示

如图：

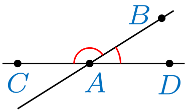


记作：$\angle\alpha$ 或 $\angle 1$

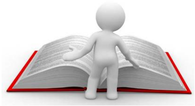
(3) 用三个大写英文字母(顶点和两条边上的点)表示



如图：



记作：$\angle BAC$、$\angle BAD$



3、角的度量

(1) 角度制

将一个周角等分为360份，其中的1份定义为1度(1°)，这种度量角的方法叫做角度制。

(2) 弧度制

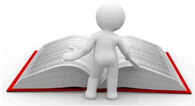
将与圆的半径等长的圆弧所对的圆心角的大小定义为1弧度(1 rad)，这种度量角的方法叫做弧度制。

(3) 角度的换算

① “度”化为“度分秒”

方法：由高向低化

例1 把26.29°转化为用度、分、秒表示的形式。



解： $0.29^\circ = 60' \times 0.29 = 17.4'$

$0.4' = 60'' \times 0.4 = 24''$

$\therefore\ 26.29^\circ = 26^\circ 17' 24''$

② “度分秒”化为“度”

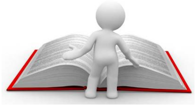
方法：由低向高化

例 2 把 $59^\circ 31' 30''$ 转化为用度表示的形式。

解： $30'' = (30 \div 60)' = 0.5'$

$31.5' = (31.5 \div 60)^\circ = 0.525^\circ$

$\therefore 59^\circ 31' 30'' = 59.525^\circ$



(4) 角度的计算

方法：从低向高计算

例 3 $153^\circ 39' 44'' + 26^\circ 40' 38''$

解：

$$44'' + 38'' = 82'' = 1' 22''$$

$$39' + 40' + 1' = 80' = 1^\circ 20'$$

$$153^\circ + 26^\circ + 1^\circ = 180^\circ$$

$$\therefore 153^\circ 39' 44'' + 26^\circ 40' 38'' = 180^\circ 20' 22''$$

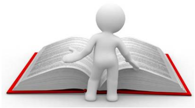
例 4 $22^\circ 22' - 18^\circ 36'$

解：

$$1^\circ 22' - 36' = 82' - 36' = 46'$$

$$21^\circ - 18^\circ = 3^\circ$$

$$\therefore \ 22^\circ 22' - 18^\circ 36'' = 3^\circ 46'$$



例 5 $53^\circ 25' 28'' \times 5$

解： $28'' \times 5 = 140'' = 2' 20''$

$25' \times 5 = 125' = 2^\circ 5'$

$53^\circ \times 5 = 265^\circ$

$53^\circ 25' 28'' \times 5 = 265^\circ + 2^\circ 5' + 2' 20'' = 267^\circ 7' 20''$

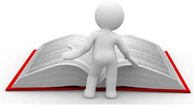
4、相关概念

(1) 周角：

等于 360° 的角。

(2) 平角：

等于 180° 的角。



(3) 直角：

等于 90° 的角。

(4) 锐角：

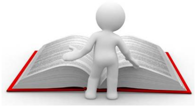
大于 0° 小于 90° 的角。

(5) 钝角：

大于 90° 小于 180° 的角。

(6) 余角：

如果两个角的和是直角，那么这两个角互为余角，简称互余。其中一个角是另一个角的余角。



(7) 补角：

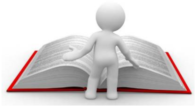
如果两个角的和是平角，那么这两个角互为补角，简称互补。其中一个角是另一个角的补角。

(8) 对顶角：

两条直线相交所构成的四个角中，有公共顶点但没有公共边的两个角互为对顶角。

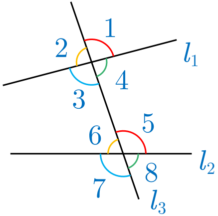
(9) 邻补角：

两条直线相交所构成的四个角中，有公共顶点且有一条公共边的两个角互为邻补角。



(10) 同位角、内错角、同旁内角

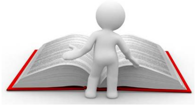
如图：两条直线 l_1 和 l_2 被第三条直线所截，构成的 8 个角 (简称三线八角) 中：

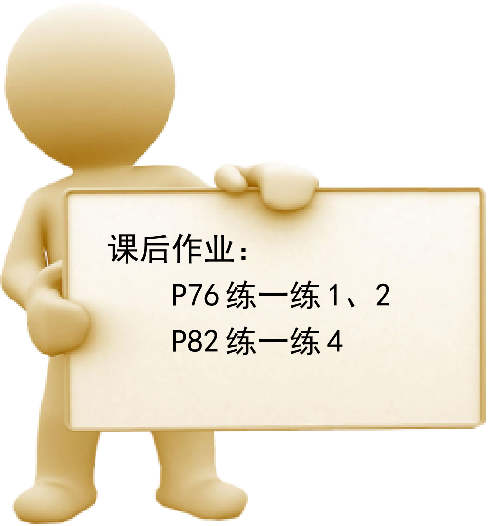


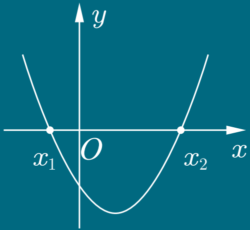
$\angle 1$ 和 $\angle 5$ 叫同位角

$\angle 3$ 和 $\angle 5$ 叫内错角

$\angle 3$ 和 $\angle 6$ 叫同旁内角

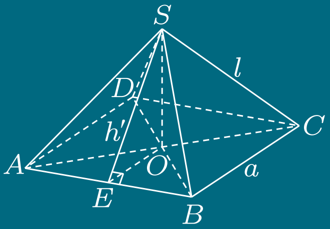



课后作业：
P76 练一练 1、2
P82 练一练 4



§4 平面图形

4.2 三角形



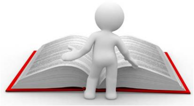
$$f(x)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x)$$

一、三角形的相关概念

1、三角形

由三条线段首位顺次连接所得的平面图形。

- ◆ 边：三条线段叫做三角形的三条边。
  - ◇ 三角形任意两边之和大于第三边。
  - ◇ 三角形任意两边只差小于第三边。
- ◆ 顶点：三条线段的公共端点。
- ◆ 内角：三角形内，两条线段所成的角。
  - ◇ 内角和定理：三角形的内角和为 $180°$。
- ◆ 外角：任一内角的一边与另一边的延长线所成的角。
  - ◇ 三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角之和。



◇ 三角形的外角和为 360°。

2、等腰三角形

有两条边相等的三角形。

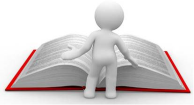
- ◆ 腰：两条相等的边也叫三角形的腰。
- ◆ 底边：除腰以外的第三边。
- ◆ 顶角：两条腰的夹角。
- ◆ 底角：腰和底边的夹角。

3、等边三角形

三条边都相等的三角形。

4、直角三角形

有一个角是直角的三角形。



5、锐角三角形

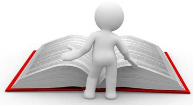
三个角都是锐角的三角形。

6、钝角三角形

有一个角是钝角的三角形。

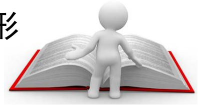
7、斜三角线

不是直角三角形的三角形。



8、各种三角形的关系

- 三角形
  - 边的关系
    - 等腰三角形
      - 底边和腰不相等
      - 底边和腰相等（等边三角形）
    - 非等腰三角形
  - 角的关系
    - 直角三角形
    - 非直角三角形（斜三角形）
      - 锐角三角形
      - 钝角三角形



二、三角形的表示

用三个顶点的字母表示

如：三角形 ABC 或 $\triangle ABC$

三、三角形中的线

1、角平分线

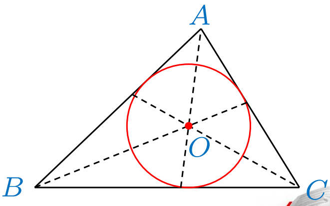
一角顶点到该角平分线与对边交点的连线。

相关性质：

◆ 三角形的三条角平分线交于一点。

该点为三角形内切圆的圆心，故也称为三角形的**内心**。

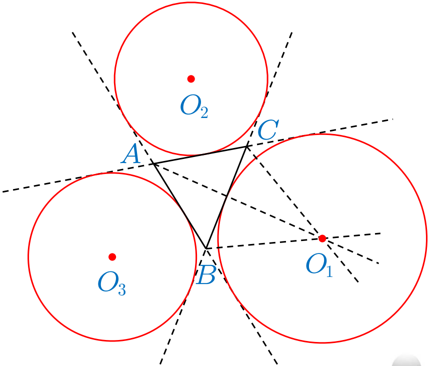
◇ 三角形有且只有一个内心。



◇ 三角形的内心到三条边的距离相等。

思考 到三角形三条边的距离相等的点一定是三角形的内心吗？

◆ 与三角形的一边及其它两边的延长线都相切的圆叫做三角形的旁切圆，旁切圆的圆心叫做三角形旁心。



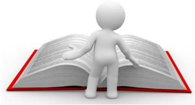
◇ 三角形有三个旁心。

◇ 三角形的旁心到三条边的距离相等。

2、中线

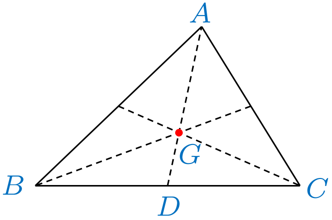
一角顶点到对边中点的连线。

相关性质：

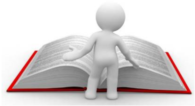


- ◆ 三角形的一条中线将三角形分成两个面积相等的三角形。
- ◆ 三角形的三条中线相交于一点。

该点是三角形的几何中心，称为三角形的**重心**。



- ◇ 三角形有且只有一个重心。
- ◇ 三角形重心到顶点的距离与到底边中点的距离比是 $2:1$。
- ◇ 三角形的重心和三角形三个顶点组成的三个三角形面积相等。



3、高

一角顶点到对边垂线垂足的连线。

相关性质：

◆ 三角形的三条高相交于一点。

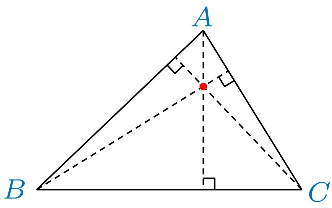
该点称为三角形的垂心。

◇ 三角形有且只有一个垂心。

◇ 锐角三角形的垂心在三角形内；

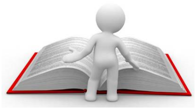
直角三角形的垂心在直角的顶点；

钝角三角形的垂心在三角形外。



4、垂直平分线

三角形三条边的垂直平分线。



相关性质：

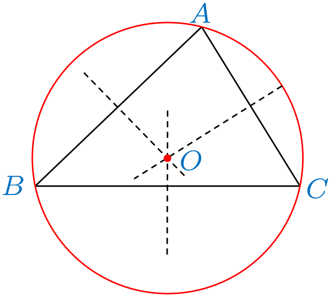
◆ 三角形三条边的垂直平分线相交于一点。该点是三角形的外接圆的圆心，简称三角形的外心。

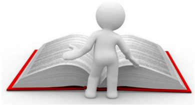
◇ 三角形有且只有一个外心。

◇ 三角形的外心到三角形三个顶点的距离相等。

注：

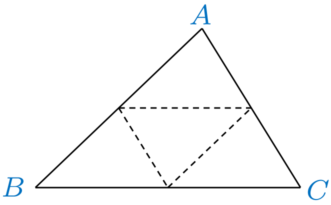
三角形的内心、旁心、重心、垂心、外心常称为三角形的“五心”。





5、中位线

三角形两边中点的连线。

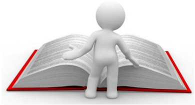


相关性质：

◆ 三角形有三条中位线。

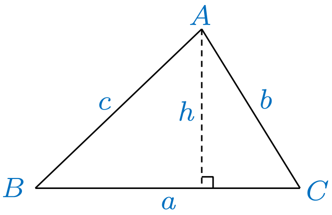
◆ 三角形两边上的中位线平行且等于第三边的一半。

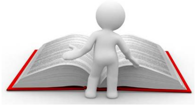
◆ 三角形的三条中位线将原三角形分成四个全等的三角形。



四、三角形的面积

$$
\begin{aligned}
S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2}\times 底 \times 高 = \frac{1}{2}ah \\
&= \frac{1}{2}ab\cdot\sin C \\
&= \frac{1}{2}ac\cdot\sin B \\
&= \frac{1}{2}bc\cdot\sin A
\end{aligned}
$$





五、其它性质

1、全等

(1) 定义

能够完全重合的两个三角形叫全等三角形。

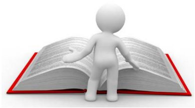
注意：

① 完全重合指：形状相同、大小相等。

② 可以全等的图形不只有三角形。

(2) 定义推广

能够完全重合（形状相同、大小相等）的两个图形叫全等图形。



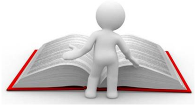
(3) 三角形全等的判定定理

- ◆ 一般三角形
  - ◇ 边角边定理 —— SAS
  - ◇ 角边角定理 —— ASA
  - ◇ 角角边定理 —— AAS
  - ◇ 边边边定理 —— SSS
- ◆ 直角三角形
  - ◇ 斜边直角边定理 —— HL

(4) 三角形全等的性质定理

① 对应边相等、对应角相等。

② 对应量都相等——对应面积相等、对应体积相等。



2、相似

(1)定义

对应角相等，对应边成比例的两个三角形叫相似三角形。

注意：

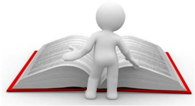
① 相似的本质是两个图形：形状相同、大小不一定同。

② 全等是一种特殊的相似。

③ 可以相似的图形不只有三角形。

(2)定义推广

形状相同、大小不一定相同的两个图形叫相似图形。



(3) 三角形相似的判定定理

◆ 一般三角形

◇ 两边对应成比例，且夹角相等—— *SAS*

◇ 两角对应成相等—— *AA*

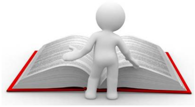
◇ 三边对应成比例—— *SSS*

◇ 平行于三角形一边的直线与其它两边（或延长线）相交所得三角形与原三角形相似。

◆ 直角三角形

◇ 斜边、一条直角边对应成比例—— *HL*

◇ 两条直角边对应成比例



(4) 三角形相似的性质定理

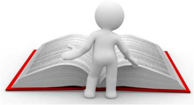
① 对应角相等、对应边成比例。

② 对应角相等

对应线成比例——等于相似比；

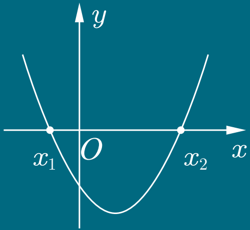
对应的面积比等于相似比的平方；

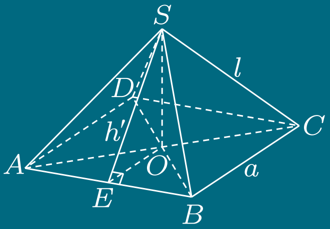
对应的体积比等于相似比的立方。



§4 平面图形

4.3 四边形





$$f(x)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x)$$

一、四边形的相关概念

1、四边形

由四条线段首位顺次连接所得的图形。

注意：

四边形不一定是平面四边形

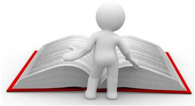
- 平面图形 —— 平面四边形
- 非平面图形 —— 空间四边形

2、边

构成四边形的线段叫四边形的边。

3、顶点

边与边的公共点角四边形的顶点。



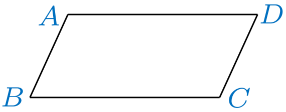
二、几种常见的四边形

1、平行四边形

(1) 定义

两组对边分别平行的四边形叫平行四边形。

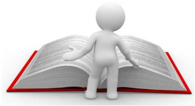
(2) 表示



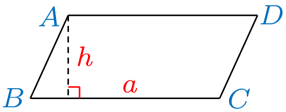
$\square ABCD$

(3) 性质

- 两组对边分别平行。
- 两组对边分别相等。
- 两组对角分别相等。
- 对角线相互平分。



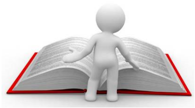
(4) 面积



$S_{\square ABCD}=$ 底 $\times$ 高 $= a \cdot h$

(5) 判定

- 定义法：两组对边分别平行的四边形。
- 两组对边分别相等的四边形。
- 两组对角分别相等的四边形。
- 对角线相互平分的四边形。
- 一组对边平行且相等的四边形。



2、矩形

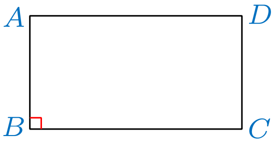
(1) 定义

有一个角是直角的平行四边形叫矩形，也叫长方形。

注意：

矩形是一种特殊的平行四边形。

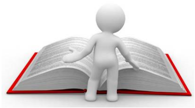
(2) 表示



矩形 $ABCD$

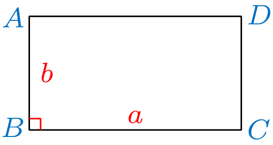
(3) 性质

- 具有平行四边形的所有性质。
- 四个内角都是直角。



◆ 对角线相等。

(4) 面积



$S_{矩形\ ABCD} = 长 \times 宽 = a \cdot b$

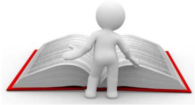
(5) 判定

◆ 定义法：有一个角是直角的四边形。

◆ 有三个角是直角的四边形

◆ 对角线相等的平行四边形。

对角线相互平分且相等的四边形。



3、菱形

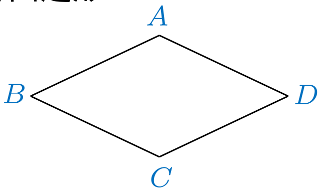
(1) 定义

有一组邻边相等的平行四边形叫菱形。

注意：

菱形是一种特殊的平行四边形。

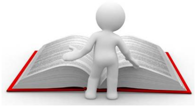
(2) 表示



菱形 $ABCD$

(3) 性质

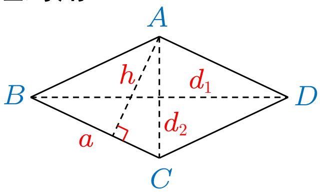
- 具有平行四边形的所有性质。
- 四条边都相等。



- 两条对角线相互垂直平分。
- 每条对角线平分一组对角。

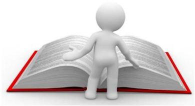
(4) 面积

$$S_{\text{菱形}\,ABCD}=a\cdot h$$
$$=\frac{1}{2}d_1\cdot d_2$$



(5) 判定

- 有一组邻边相等的平行四边形。
- 对角线相互垂直的平行四边形。
  对角线相互垂直平分的四边形。
- 四条边都相等的四边形。



4、正方形

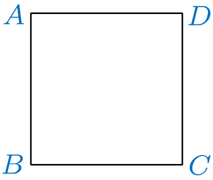
(1) 定义

有一组邻边相等的矩形。

注意：

正方形是一种特殊的矩形，菱形、平行四边形。

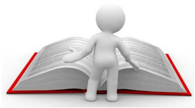
(2) 表示



正方形 $ABCD$

(3) 性质

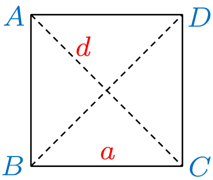
- 具有矩形的所有性质。
- 具有菱形的所有性质。



- 具有平行四边形的所有性质。
- 四条边都相等、四个角都是直角。
- 两条对角线相等且垂直平分。

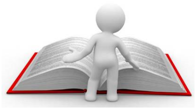
(4) 面积

$$S_{正方形ABCD}=a^2=\frac{1}{2}d^2$$



(5) 判定

- 定义法：有一组邻边相等的矩形。
- 对角线相互垂直的矩形。
- 对角线相等的菱形。



对角线相等且垂直平分的四边形。

- 有一个角是直角的菱形。

5、梯形

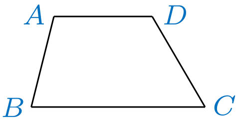
(1) 定义

有一组对边平行但不相等的四边形叫梯形。

上底边、下底边、腰

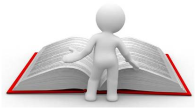
(2) 表示

梯形 $ABCD$



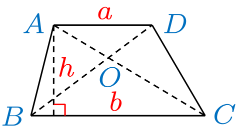
(3) 性质

- 等腰梯形顶角相等、底角相等、对角线相等。
- 梯形的中位线平行与底边且等于上下底边和的一半。



(4) 面积

$$S_{\text{梯形}ABCD}=\frac{1}{2}(a+b)\cdot h$$

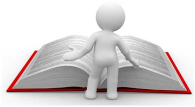


常用面积关系：

$$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle DCB}$$

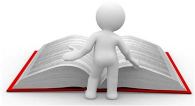
$$S_{\triangle ADB}=S_{\triangle DAC}$$

$$S_{\triangle AOB}=S_{\triangle DOC}$$



6、几种四边形的关系

- 四边形
  - 有两组对边平行——平行四边形
    - 普通平行四边形
    - 一个角是直角—矩形
    - 一组邻边相等—菱形
    - 正方形
  - 有一组对边平行——梯形
  - 没有对边平行——其它四边形



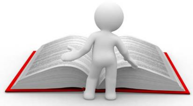
三、n边形的性质

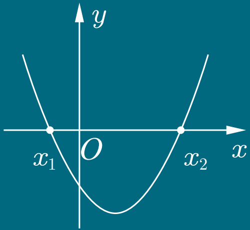
1、内角和

$(n-2)\cdot 180^{\circ}$

2、外角和

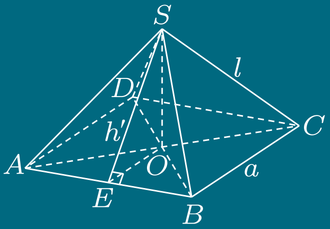
360°





§4 平面图形

4.4 圆



$$f(x)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x)$$

一、圆的相关概念

1、圆

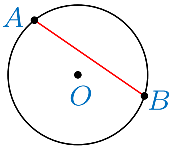
平面上到一个定点的距离等于定长的点的轨迹。

◇ 定点——圆心

◇ 定长——半径

2、弦

连结圆上任意两点的线段叫做弦。

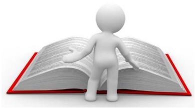


3、直径

经过圆心的弦叫做直径。

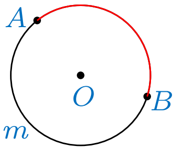
注意：

直径是一条特殊的弦。



4、弧

圆上任意两点间的部分叫做弧。



5、半圆

圆的任意一条直径的两个端点分圆成两条弧，每一条弧都叫做一个半圆。

注意：半圆是一条特殊的弧。

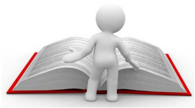
6、优弧和劣弧

大于半圆的弧叫做优弧，小于半圆的弧叫做劣弧。

注意：$\overset{\frown}{AB}$默认表示的是劣弧，要表示优弧可借助弧上一点来表示。

如：$\overset{\frown}{AmB}$

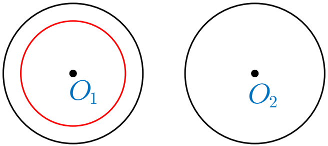
7、同心圆



圆心相同的圆叫做同心圆。

8、等圆

能够重合的圆叫做等圆。



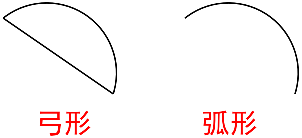
9、弓形

由弦及其所对的弧组成的图形叫做弓形。

注意：

◇ 弓形是一个封闭图形。

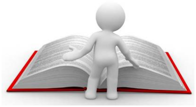
◇ 弧（形）是一个开放图形。



10、等弧

在同圆或等圆中，能够相互重合的弧叫做等弧。

11、圆心角



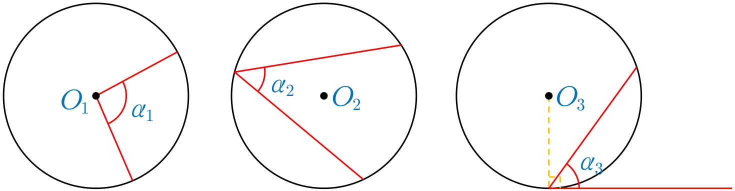
顶点在圆心，角的两边与圆相交的角叫做圆心角。

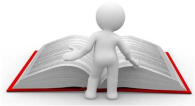
12、圆周角

顶点在圆上，角的两边和圆相交的角叫做圆周角。

13、弦切角

顶点在圆上，一边和圆相交，另一边和圆相切的角叫做弦切角。

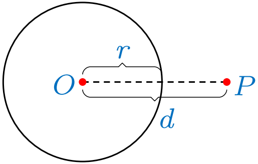




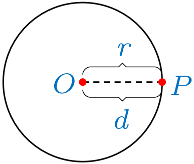
二、与圆相关的位置关系

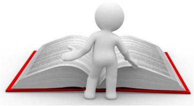
1、点与圆的位置关系

(1) 点在圆外 $\Leftrightarrow$ $d > r$

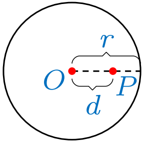


(2) 点在圆上 $\Leftrightarrow$ $d = r$



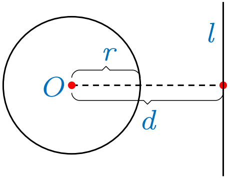


(3) 点在圆内 $\Leftrightarrow\ 0<d<r$

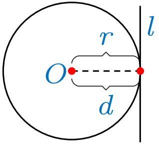


2、直线与圆的位置关系

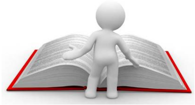
(1) 相离 $\Leftrightarrow d>r$



(2) 相切 $\Leftrightarrow d=r$

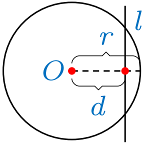


(3) 相交 $\Leftrightarrow 0<d<r$

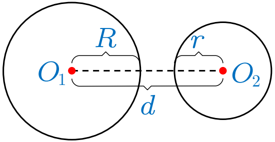


3、圆与圆的位置关系

(1) 外离 $\Leftrightarrow d > R + r$

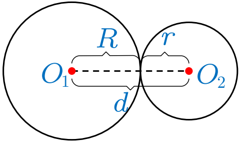


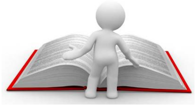
(2) 外切 $\Leftrightarrow d = R + r$



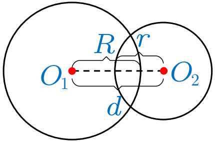
(3) 相交

$\Leftrightarrow |R - r| < d < R + r$

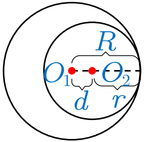


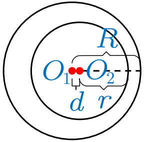


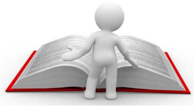
(4) 内切　$\Leftrightarrow d=|R-r|$



(5) 内含　$\Leftrightarrow 0<d<|R-r|$







三、圆的相关性质

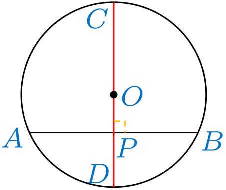
1、对称性

(1) 轴对称图形——经过圆心的任何一条直线是它的对称轴。

(2) 中心对称图形——圆心是它的对称中心。

2、垂径定理

垂直于弦的直径平分这条弦，并且平分弦所对的两条弧



若 $AB \perp CD$

则 $PA = PB$

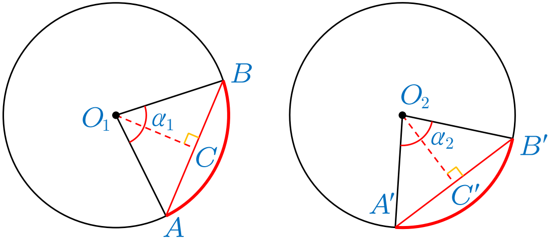
$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BC}$

$\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD}$

3、圆心角、弧、弦、弦心距之间的关系

◆ 在同圆或等圆中，相等的圆心角所对的弦相等，所对的弧相等，所对的弦的弦心距相等。

◆ 在同圆或等圆中，如果两个圆心角、两条弧、两条弦的弦心距中有一组量相等，那么它们所对应的其余各组量也都分别相等。



若 $\alpha_1 = \alpha_2$

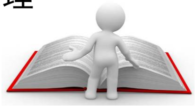
则 $AB = A'B'$

$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'}$

$O_1C = O_2C'$

4、圆周角定理

◇ 一条弧所对的圆周角等于它所对的圆心角的一半。

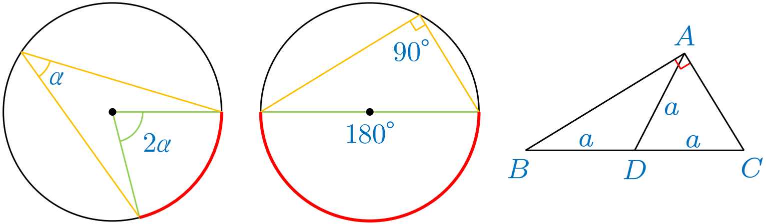


◇ 半圆（或直径）所对的圆周角是直角；

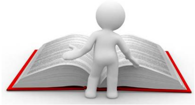
◇ 90° 的圆周角所对的弦是直径

推论：

如果三角形一边上的中线等于这条边的一半，那么这个三角形是直角三角形。



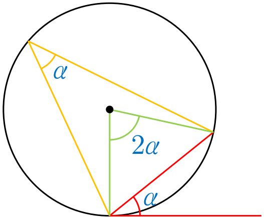
5、弦切角定理



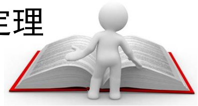
弦切角等于它所夹的弧所对的圆周角， 等于它所夹的弧所对的圆心角的一半。

推论：

两个弦切角所夹的弧相等，那么这两个弦切角也相等。



6、圆幂定理

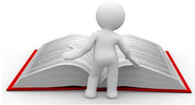


过任意不在圆上的一点 P 作两条直线 l_1、l_2，l_1 与圆交于 A、B（可重合，即切线），l_2 与圆交于 C、D（可重合），

则有：$PA \times PB = PC \times PD$

注意：

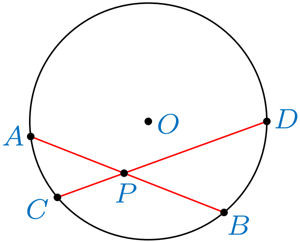
圆幂定理有 3 种具体的表现形式。



◆ 相交弦定理

圆内的两条相交弦，被交点分成的两条线段长的积相等。

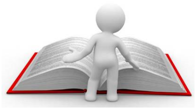
(经过圆内一点引两条弦，各弦被这点所分成的两段的积相等)



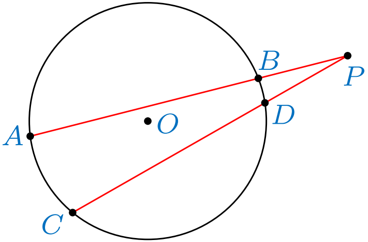
$$PA \times PB = PC \times PD$$

特点：点 P 在圆内

◆ 割线定理



从圆外一点引圆的两条割线，这一点到每条割线与圆交点的距离的积相等



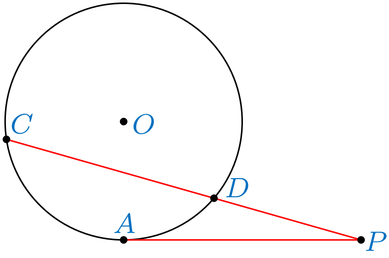
$$PA \times PB = PC \times PD$$

特点：点 P 在圆外

◆ 切割线定理

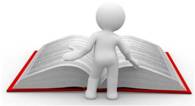
从圆外一点引圆的切线和割线，切线长是这点到割线与圆交点的两条线

段长的比例中项



$$PA^2 = PC \times PD$$

特点：点 P 在圆外



四、与圆有关的计算

1、圆的周长

$$C_{圆}=2\pi r=\pi d$$

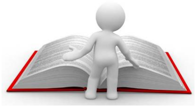
2、圆的面积

$$S_{圆}=\pi r^2=\frac{1}{4}\pi d^2$$

3、弧长

$$\because \frac{n^\circ}{360^\circ}=\frac{l}{C_{圆}}=\frac{l}{2\pi r}$$

$$\therefore l=\frac{2n^\circ\pi r}{360^\circ}=\frac{n\pi r}{180}$$



4、扇形的面积

$$\because \frac{n^\circ}{360^\circ}=\frac{S_{扇}}{S_{圆}}=\frac{S_{扇}}{\pi r^2}$$

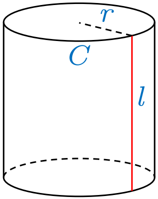
$$\therefore S_{扇}=\frac{n^\circ \pi r^2}{360^\circ}=\frac{n\pi r^2}{360}$$

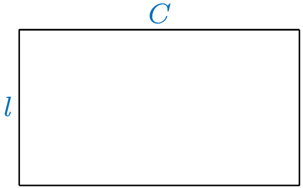
$$=\frac{n\pi r\cdot r}{180\cdot 2}=\frac{1}{2}lr$$

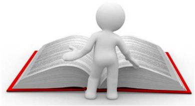
5、圆柱的侧面积

$$S_{柱侧}=Cl$$

$$=2\pi rl$$

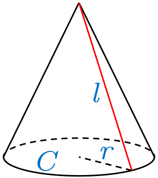


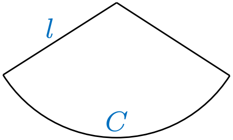




6、圆锥的侧面积

$$S_{锥侧}=\frac{1}{2}Cl$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 2\pi r\cdot l$$
$$=\pi rl$$





7、圆柱的体积

$$V_{柱}=S_{底}\cdot h$$

8、圆锥的体积

$$V_{锥}=\frac{1}{3}V_{柱}=\frac{1}{3}S_{底}\cdot h$$