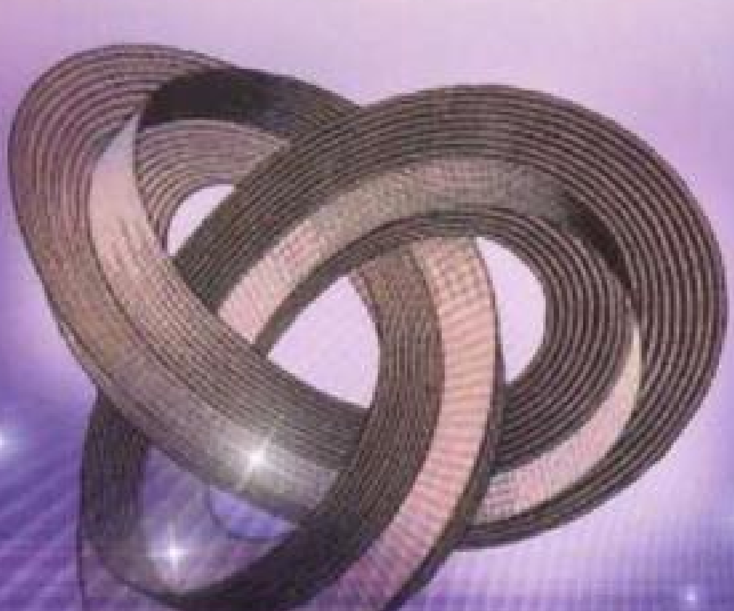
中等职业教育课程改革新教材

数学

SHUXUE

（预备级）

主　编／李建明　周永花



北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

中等职业学校教材

数　学
（预备级）

北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学：预备级/李建明，周永花主编. —北京：北京师范大学出版社，2014.9(2018.12 重印)
(中等职业教育课程改革新教材)
ISBN 978-7-303-17835-3

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①李… ②周… Ⅲ. ①数学课-中等专业学校-教材 Ⅳ. ①G634.601

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 174073 号

营销中心电话 010-58802755 58800035
北师大出版社职业教育分社网 http://zjfs.bnup.com
电子信箱 zhijiao@bnupg.com

出版发行：北京师范大学出版社 www.bnup.com
北京新街口外大街 19 号
邮政编码：100875
印 刷：保定市中画美凯印刷有限公司
经 销：全国新华书店
开 本：184 mm×260 mm
印 张：9
字 数：173 千字
版 次：2014 年 9 月第 1 版
印 次：2018 年 12 月第 3 次印刷
定 价：19.80 元

策划编辑：庞海龙 责任编辑：邢自兴
美术编辑：高 霞 装帧设计：弓禾碧工作室
责任校对：李 菡 责任印制：马 洁

前　　言

一、编写背景

由于现阶段中职学生初中数学基础相对比较薄弱，学习数学自信心不足，甚至部分学生有学习数学的恐惧心理。若直接根据现有中职数学教材展开教学，学生接受困难，教师教学也很吃力。为做好初中与中职数学知识点的衔接，夯实基础，培养学生的学习兴趣，我们编写了此书。

二、编写特点

本书在编写中对原有数学知识中部分内容进行了取舍和重新整合。编写时以“过程教学”和“问题解决”作为教材编写的指导思想，尽力做到“教师易教，学生易学，重在学生易学”。在教学内容的展开和基本技能的训练上，坚持从学生的实际认知水平出发，从学生日常生活与专业的实际需要出发，降低各部分知识的起点，强调温故知新，以旧引新，使知识过渡更加自然。编写中坚持“降低难度，浅化理论，删繁就简，削枝强干，从现象、问题引入，师生互动，手脑并用”的方针。

根据中职学生的年龄特征和心理特点，教材选用一些生活中的片段、图片采用“观察”“想一想”“议一议”等形式引入知识，适当结合具体事例阐述学习相关知识的必要性；用“记一记”等形式把知识点直接呈现，让学生记忆、掌握。采用“想一想”“做一做”“议一议”“练一练”等形式，并以简单典型生活事例、专业事例为例题、习题，配合一定的图片，这样知识点就显得生动、形象、具体、有趣。在叙述方式上，力求通俗易懂、生动形象，淡化严谨的、形式化的推理论证，降低数学语言(包括概念、性质、法则、公式、结论等)的严密性和完整性。每个模块后都配了综合练习，用以巩固本模块重要知识点和锻炼学生应用知识解决问题的能力。

同时，为培养学生数学素养，增加学习数学的趣味性和了解数学在生产中的实用价值，每模块后选编了几个小故事、小知识等阅读材料。

本书由兰州城市建设学校李建明、周永花主编。其中，李建明编写了模块1至模块3,并负责全书统稿；周永花编写了模块4至模块6。

由于时间仓促，加之编写人员经验不足、水平有限，书中错误和遗漏之处在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

目 录

Contents

模块 1　数与式

1.1　数的相关概念及运算

在日常生活中，我们需要把各种事物分类整理，才会方便使用，例如家里的衣服、学习用具、施工单位的各种文件资料、工地上的建筑材料等．同理，数学中的种种数也有相应的分类，即

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\left.\begin{array}{l}\text{正整数}\\ \text{零}\end{array}\right\}\text{自然数}\\ \text{负整数}\end{cases}\\ \text{分数(正分数和负分数)：有限小数和无限循环小数}\end{cases}\\ \text{无理数(正无理数和负无理数)：无限不循环小数}\end{cases}$$

1.1.1　数的定义

记一记

【整数】像…，-4，-3，-2，-1，0，1，2，3，4，…这样的数叫作整数．

【自然数】表示物体个数的 1，2，3，4，…叫作自然数．一个物体没有时，用 0 表示，0 也是自然数．显然，最小的自然数是 0，没有最大的自然数，自然数的个数是无限的．

【分数】分数是把一个单位分成若干等份，表示其中一份或几份的数．其中做分母的整数不能等于 0．例如$\frac{1}{2}$，$\frac{4}{3}$，$-\frac{5}{12}$等．

【小数】有小数点并且小数点后面至少有一个不为 0 的数，这样的数叫作小数．例如 0.1，-0.03，1.732，$2.\dot{4}$ 等．

【无理数】数的出现不遵循任何规律，并且不能写作两个整数之比．若将它写成小数形式，小数点之后的数字有无限多个，并且没有循环(无限不循环小数)．比如圆周率 $\pi=3.141\,592\,6\cdots$，$\sqrt{2}=1.414\,213\,562\cdots$．

【有理数】数的出现总是遵循某一个规律，并且总能写作两个整数之比．比如$\frac{3}{1}=3$，

$\frac{8}{2}=4$，$\frac{4}{5}=0.8$，$\frac{1}{3}=0.333\ 33\cdots=0.\dot{3}$.

【实数】有理数与无理数统称为实数.

议一议

$\sqrt{4}$，$\sqrt[3]{27}$是无理数吗？$\frac{\pi}{3}$是分数吗？

做一做

将下列各数分类：3，$-\frac{1}{12}$，$\frac{1}{3}$，$-\sqrt{9}$，$\sqrt[3]{-0.064}$，π，0.010 305…，1.010 010 001，3.141 6，16，0，$\sqrt{7}$，-5.

解： 自然数：3，16，0.

整数：3，$-\sqrt{9}$，16，0，-5.

分数：$-\frac{1}{12}$，$\frac{1}{3}$.

有理数：3，$-\frac{1}{12}$，$\frac{1}{3}$，$-\sqrt{9}$，$\sqrt[3]{-0.064}$，1.010 010 001，3.141 6，16，0，-5.

无理数：π，0.010 305…，$\sqrt{7}$.

实数：3，$-\frac{1}{12}$，$\frac{1}{3}$，$-\sqrt{9}$，$\sqrt[3]{-0.064}$，π，0.010 305…，1.010 010 001，3.141 6，16，0，$\sqrt{7}$，-5.

练一练

1. 判断下面的说法是否正确，如果不正确，请说明理由并改为正确的.

(1)自然数包括 0 和正整数.　　　　　　(　　)

(2)0 是最小的整数.　　　　　　(　　)

(3)无限小数都是无理数.　　　　　　(　　)

(4)无理数都是无限小数.　　　　　　(　　)

(5)无理数都是开方开不尽的数.　　　　　　(　　)

2. 有问必答：

(1)大于-1而小于$+1$的整数是哪些？

(2)有比-2大的负实数吗？如果有请任意写出 3 个.

(3)$\sqrt{7}$是什么数？试将它的结果写成小数并保留小数后三位.

(4)请写出你的年龄、身高、体重，它们分别是哪一类数？

3. 在你的身边寻找各类数字，将它们分类，看看谁更用心.

1.1.2　数轴

记一记

【数轴】规定了原点、正方向和单位长度的直线叫作数轴．数轴上的点和实数成一一对应的关系．数轴是数形结合的基础，也是平面直角坐标系的基础．(图 1-1)

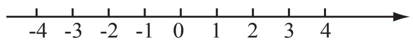


图 1-1

单位长度是指取适当的长度作为单位长度，比如可以取 2 m 作为单位长度“1”，那么 4 m 就表示 2 个单位长度．长度单位则是指米(m)，厘米(cm)，毫米(mm)等表示长度的单位．二者不能混淆！

做一做

1．实数 a，b 在数轴上对应点的位置如图 1-2 所示，则有(　　)．

A．$a+b<0$　　B．$a-b<0$　　C．$a-b=0$　　D．$a-b>0$

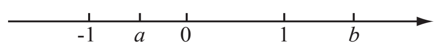


图 1-2

解：数轴上右边点对应的实数大于左边点对应的实数，故 $a-b<0$.

2．用“>”或“<”号填空．

(1)2 ______ $2.\dot{4}$；　　(2)$\frac{1}{3}$______ 0.33；

(3)-0.8 ______ -0.9；　　(4)$-\sqrt{3}$______ -1.732.

解：与上题一样应用数轴上右边点对应的实数大于左边点对应的实数．

即得(1)$2<2.\dot{4}$；(2)$\frac{1}{3}>0.33$；(3)$-0.8>-0.9$；(4)$-\sqrt{3}<-1.732$.

3．认真思考，回答下列问题：

(1)同一条数轴能不能有两个不同的单位长度？

(2)所有的数都有倒数，对吗？为什么？

解：(1)不能．一条数轴只能有一个单位长度作参照，这样标在其上的数字才有可比性．否则，参照标准不同，数字之间就无法比较．

(2)说法不对．因为 0 不能做分母，所以 0 没有倒数．

4．在数轴上表示下列各数，并比较它们的大小．

1，0.5，-0.618，0，$\frac{3}{2}$，$|-8|$，$|2|$.

解：先排序．$\because |-8|=8$；$|2|=2$.

$\therefore |-8|>|2|>\frac{3}{2}>1>0.5>0>-0.618$. 数轴表示略．

记一记

比例尺是表示图形的尺寸和实物尺寸的放大或缩小的倍数.

在地图上，经常出现的是缩小的比例尺.

机械工程图样上经常出现的比例尺，有放大的(例如，2∶1 实物的大小是图上测得的 $\frac{1}{2}$)也有缩小的(例如，1∶2 实物的大小是图上测得的 2 倍).

建筑工程图样上采用的比例类似地图，采用缩小的比例尺居多. 例如，1∶1 000 000 就表示地图上 1 cm 的距离，实际的距离为 1 cm×1 000 000＝10 000 m 即 10 km.

练一练

在一张精密零件图样上(比例尺为 5∶1)，量得零件长 40 mm，这个零件实际长________.

1.1.3　相反数、倒数、绝对值

记一记

【相反数】一个数的符号是指它的正负号. 如图 1-3 所示，4 与－4 这两个数，只有符号不同，一正一负，在数轴上表示这两个数的点，分别位于原点的两侧，而且与原点的距离相等. 很显然，4 与－4 这两个数对应的点关于原点是对称的，即原点是互为相反数的两个对应点的对称点.

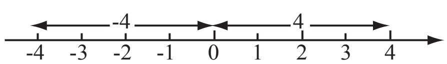


图 1-3

注意：实数 a 的相反数是 $-a$；0 的相反数是 0.

【倒数】如果两个数的乘积是 1，那么它们叫作互为倒数.

求一个分数的倒数，只要把这个分数的分子、分母颠倒位置即可. 例如 $\frac{3}{4}$，我们只须把 $\frac{3}{4}$ 这个分数的分子和分母交换位置，即得 $\frac{3}{4}$ 的倒数为 $\frac{4}{3}$.

求一个整数(不等于零)的倒数，只需将这个整数写在分母上，分子上写 1 即可. 例如 10，写作 $\frac{1}{10}$ 即为 10 的倒数.

议一议

能不能说任意实数 a 的倒数都为 $\frac{1}{a}$，为什么?

【绝对值】一个数 a 的绝对值就是数轴上表示数 a 的点到原点的距离. 数 a 的绝对值记作 $|a|$. 一个正数的绝对值是它本身；一个负数的绝对值是它的相反数；0 的绝对值是 0.

做一做

1. 体育课上，两名同学从同一位置沿同一直线相背而行，各走 5 m，此时相对于出发点他们产生的距离各是多少米？

解： 都是 5 m.

2. 写出下列各数的绝对值：

(1) -5，0，0.72；

(2) $m+1$.

解： (1) $|-5|=5$；　　$|0|=0$；　　$|0.72|=0.72$.

(2) $|m+1|=\begin{cases} m+1, & m>-1, \\ 0, & m=-1, \\ -(m+1), & m<-1. \end{cases}$

3. 已知 $|a-3|=3-a$，试求 a 的取值范围.

解： $\because |a-3|=3-a=-(a-3)$，$\therefore a-3<0$，即 $a<3$.

练一练

1. 画数轴，并在该数轴上标出 -6，2，3.5，0，4 各数及它们的相反数. 最后将这些数按照从小到大的顺序排列.

2. 判断下列说法是否正确.（正确的打“√”，错误的打“×”）

(1) 两个互为相反数的和是 0.　　(　　)

(2) 两个互为倒数的积是 0.　　(　　)

(3) 最小的自然数是 1.　　(　　)

(4) 0 的倒数是 0.　　(　　)

(5) 如果 $|x|=|y|$，那么 $x=y$.　　(　　)

3. 用“$>$”或“$<$”号填空.

(1) 若 a 是负数，那么 $-a$ ________ 0.

(2) 若 $-a$ 是负数，那么 a ________ 0.

4. 把一个圆形草坪画在比例尺为 1∶2 000 的平面图上，半径为 3 cm，这个圆形草坪的实际面积是________ m^2.

1.1.4　实数的运算

记一记

实数可以进行加、减、乘、除、乘方运算，正实数还可以进行开方运算，负实数只能进行开奇次方运算.

1. 加法法则

(1) 同号两数相加，取相同的符号，并把绝对值相加；

(2)绝对值不相等的异号两数相加，取绝对值较大的加数的符号，并用较大的绝对值减去较小的绝对值．互为相反数的两个数相加得 0；

(3)一个数与 0 相加，仍得这个数．

2．减法法则

减一个数，等于加上这个数的相反数，用字母可以表示为

$$a-b=a+(-b).$$

3．乘法法则

(1)两数相乘，同号得正，异号得负，并把绝对值相乘；

(2)任何数与 0 相乘，结果都得 0；几个数相乘，有一个因数为 0，积就为 0；

(3)几个不等于 0 的数相乘，积的符号由负因数的个数决定．当负因数有奇数个时，积为负；当负因数有偶数个时，积为正．

4．除法法则

除以一个数等于乘以这个数的倒数．用字母可以表示为

$$a\div b=a\cdot\frac{1}{b}(b\neq 0).$$

(1)两数相除，同号得正，异号得负，并把绝对值相除；

(2)0 不能做除数；

(3)0 除以任何一个不为 0 的数，商都为 0．

5．乘方

求相同因数的积的运算叫作乘方运算．乘方的结果称为幂，即

$$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{n\text{个}a}$$

(1)平方(2 次方)

正数的平方是正数；负数的平方还是正数；0 的平方是 0．

例如，$2^2=4$，$(-2)^2=4$，$0^2=0$．

实数的其他偶次方的性质与实数的平方的性质类同．

(2)立方(3 次方)

正数的立方是正数；负数的立方是负数；0 的立方是 0．

例如，$2^3=8$，$(-2)^3=-8$，$0^3=0$．

实数的其他奇次方的性质与实数的立方的性质类同．

注意： 若 $a\neq 0$，则 $a^0=1$；若 $a\neq 0$，n 为正整数，则 $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$．

6．开方

求一个数的方根的运算叫作开方运算．求 a 的 n(n 是正整数)次方根，称为把 a 开 n 次方．记作 $\sqrt[n]{a}$．

(1)开平方(所有开偶次方的情况与之类同)

①求一个数的平方根的运算叫作开平方;

②被开方数 a 必须是正数或者 0;

③一个正数 a 有两个平方根,它们互为相反数,记作 $\pm\sqrt{a}$;其中正的那一个叫作正数 a 的算术平方根,记作 $\sqrt{a}$;数 0 的平方根是 0,算术平方根也是 0. 例如 4 的平方根是 $\pm\sqrt{4}=\pm 2$,算术平方根是 2;

④二次根式计算中经常使用的两个公式:$(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant 0)$,$\sqrt{a^2}=|a|$.

(2)开立方(所有开奇次方的情况与之类同)

①求一个数的立方根的运算叫作开立方. $\sqrt[3]{a}$叫作实数 a 的立方根;

②被开方数可为正数,可为负数,也可为 0;

③任何数都有唯一一个立方根,一个数的立方根的符号与这个数的符号相同;例如 8 的立方根是$\sqrt[3]{8}=2$,-8 的立方根是 $\sqrt[3]{-8}=-2$.

④三次根式计算中经常使用的两个公式:$(\sqrt[3]{a})^3=a$,$\sqrt[3]{a^3}=a$.

7. 数的求和

有些求和的算式比较长,书写不方便,为了简便起见,这时可用求和符号“$\sum$”来表示. 和式 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$ 可以简单地表示为 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$. 当然,i 不是必须从 1 开始,它可以从小于等于 n 的任何一个整数 m 开始,如 $\sum\limits_{i=m}^{n}a_i=a_m+a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_n$ 表示按照求和数的规律 a_i 从第 m 项开始一直加到第 n 项 a_n.

例如,式子“$1+2+3+4+\cdots+100$”表示从 1 开始的 100 个连续自然数的和,为了简便起见,这时可用求和符号“$\sum$”表示为 $1+2+3+4+\cdots+100=\sum\limits_{n=1}^{100}n$.

再如,“$5+7+9+\cdots+99$”,即从 5 开始的 100 以内的连续奇数的和,可表示为 $5+7+9+\cdots+99=\sum\limits_{n=3}^{50}(2n-1)$.

注意:求和符号“$\sum$”上面的数字是指按照求和数的性质(也就是规律)最后一项的序号,求和符号“$\sum$”后的代数式表示相加数的性质(也就是规律),求和符号“$\sum$”下面的数字表示按照求和数的性质(也就是规律)从第几项开始求和.

8. 科学记数法、近似数与有效数字

(1)科学记数法:把一个数记成 $\pm a\times 10^n$ 的形式(其中 $1\leqslant a<10$,n 是整数),这种记数方法叫作科学记数法. 用幂的形式,可以方便地表示日常生活中遇到的一些较大的数,如光的速度大约是 300 000 000 m/s、全世界人口数大约是 6 100 000 000,这样大的数字,

读、写都很不方便，考虑到10的幂有如下特点：

$10^2=100$，$10^3=1\ 000$，$10^4=10\ 000$，…

一般地，用10的 n 次幂表示在1的后面有 n 个0，这样就可用10的 n 次幂表示一些大数，如 $6\ 100\ 000\ 000=6.1\times1\ 000\ 000\ 000=6.1\times10^9$.

任何非0实数的0次方都等于1.

当有了负整数指数幂，小于1的正数也可以用科学记数法表示. 例如，$0.000\ 01=10^{-5}$，即小于1的正数也可以用科学记数法表示为 $a\times10^{-n}$ 的形式，其中 a 是正整数数位只有一位的正数，n 是正整数.

(2)近似数与有效数字：一个近似数，四舍五入到哪一位，就说这个近似数精确到哪一位，这时从左边第一个不为零的数字起，到末位数字为止，所有的数字都叫作这个近似数的有效数字. 如：0.000 101的有效数字是1，0，1，有3个；0.123 123的有效数字是1，2，3，1，2，3，有6个；1.230 122的有效数字是1，2，3，0，1，2，2，有7个.

近似数在我们的周围可说是随处可见，我们的生产、生活每时每刻都在应用近似数. 因为实际生活中往往测量或计算某些事物是无法得到一个精确值的，所以要用近似数. 人的身高，体重，房子的面积，月用电量，用煤气量，人的血压，家具的尺寸，容器的容积等都是近似数. 再例如，我们的年龄就是一个近似数，某人今年14岁，就没有必要说得那么准确，说是13岁8个月零5天，如果他非那么说的话，别人准会认为那人有问题，听起来麻烦. 再例如，我们到活动基地参加社会实践活动，问老师需要多少费用，老师说大约40元，也是一个近似数；有的说得很明确，如有“约为”的字眼，有的可以从生活实际去理解，像前面说到的无法弄得十分精确的“人的体重”之类的就是近似数，能说得准确的比如“我们班上的人数”“楼的层数”就是准确数.

做一做

1. 求值：

(1) $-3+(-8)$；　(2) $\pi-(-2)$；　(3) $(-5)\times0$；

(4) $(-36)\div4$；　(5) $(-\frac{1}{2})^3$；　(6) $\sqrt{256}$.

解： (1) $-3+(-8)=-3-8=-11$；　(2) $\pi-(-2)=\pi+2$；

(3) $(-5)\times0=0$；　(4) $(-36)\div4=-9$；

(5) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3=(-\frac{1}{2})\times(-\frac{1}{2})\times(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{8}$；　(6) $\sqrt{256}=16$.

2. 求下列各数的平方根，并写出算术平方根：

(1) 36；　(2) 0.04；　(3) $\frac{25}{49}$.

解： (1) 36的平方根为 ±6，算术平方根为6；

(2) 0.04的平方根为 ±0.2，算术平方根为0.2；

(3)$\frac{25}{49}$的平方根为$\pm\frac{5}{7}$，算术平方根为$\frac{5}{7}$.

3. 求下列各数的立方根：

(1)27；　　(2)-0.001；　　(3)$\frac{1}{64}$.

解：(1)27 的立方根为 3；

(2)-0.001 的立方根为-0.1；

(3)$\frac{1}{64}$的立方根为$\frac{1}{4}$.

4. 把 12 500 取两个有效数字的近似数用科学记数法表示为(　　).

解：第 1 步先写成 1.25×10^4；第 2 步对 1.25 中的第 3 个有效数字 5 运用四舍五入法近似地写成 1.3×10^4.

5. 空气的单位体积质量是 0.001 239 g/cm^3，此数保留三位有效数字的近似数用科学记数法表示为(　　).

A. 1.239×10^{-3}　　B. 1.23×10^{-3}　　C. 1.24×10^{-3}　　D. 1.24×10^{3}

解：一些较大的数或者较小的数，读写都不太方便，一般用科学记数法表示使用较方便，因为有效数字要用四舍五入法保留，所以可先把 0.001 239 用科学记数法表示出来后，再确定有效数字. 即 $0.001\ 239=1.239\times10^{-3}$，则保留 3 位有效数字为 1.24×10^{-3}. 答案选 C.

6. 用求和符号表示：

(1)$2+4+6+8+10+\cdots+100$；

(2)$1^2-1+2^2-1+3^2-1+\cdots+10^2-1$.

解：(1)$2+4+6+8+10+\cdots+100=\sum\limits_{n=1}^{50}2n$；

(2)$1^2-1+2^2-1+3^2-1+\cdots+10^2-1=\sum\limits_{n=1}^{10}(n^2-1)$.

练一练

1. 已知 $x^2=324$，求 x.

2. 已知 $x^3=125$，求 x.

3. 用计算器计算(精确到 0.01)：

(1)$\sqrt{3\ 426}$；　　(2)$(0.86)^2$；　　(3)$\sqrt[3]{123.4}$；

(4)$(0.37)^4$；　　(5)0.025×3.14；　　(6)$\frac{1.23\times0.38}{15}$.

4. 据报道，2010 年我国粮食产量将达到 540 000 000 000 kg，用科学记数法表示这个粮食产量为________ kg.

5. 在比例尺为 1∶100 000 000 的地图上，量得图上两地间的距离为 4.2 cm，用科学计数法表示实际两地间的距离为________ km.

6.（1）用求和符号表示：$2^3+3^3+\cdots+n^3+(n+1)^3$；

（2）$\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{1}{i}-\dfrac{1}{i+1}\right)$ 表示什么？

1.1.5 运算律与运算顺序

记一记

1. 运算律

设 a，b，c 为任意实数，则在进行实数运算时，可以运用以下运算律：

（1）加法交换律：$a+b=b+a$；

（2）加法结合律：$a+b+c=a+(b+c)$；

（3）乘法交换律：$ab=ba$；

（4）乘法结合律：$abc=a(bc)$；

（5）分配率：$a(b+c)=ab+ac$.

2. 运算性质

在进行实数的混合运算时，需要按下面的顺序进行：

（1）在同一个算式里，先算乘方、开方，再算乘、除，最后算加、减；

（2）一个算式里，如果有括号，先算括号里面的（按照先小括号，再中括号，后大括号的顺序），后算括号外面的.

（3）加、减，乘、除，乘方、开方按运算级别分为第一级、第二级、第三级. 先进行高一级运算，再进行低一级运算；在同级运算时，按从左到右的顺序进行.

练一练

计算：

（1）$16\div(-2)^3-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}+(\sqrt{3}-1)\times 0$；

（2）$\left(-\dfrac{4}{3}\right)\div\left(-\dfrac{4}{3}\right)\times\dfrac{5}{3}$；

（3）$-5^2-\left[-4+\left(1-0.2\times\dfrac{1}{5}\right)\div(-2)\right]$；

（4）$(-3)^2-\left(\dfrac{3}{2}\right)^3\times\dfrac{2}{9}-6\div\left|-\dfrac{2}{3}\right|$.

趣味数学

人们把 12 345 679 叫作“缺 8 数”，这“缺 8 数”有许多让人惊讶的特点，比如用 9 的倍数与它相乘，乘积竟会是由同一个数组成。例如：

12 345 679×9=111 111 111

12 345 679×18＝222 222 222

12 345 679×27＝333 333 333

……

12 345 679×81＝999 999 999

这些都是 9 的 1 倍至 9 的 9 倍的。还有 99，108，117 至 171。

12 345 679×99＝1 222 222 221

12 345 679×108＝1 333 333 332

12 345 679×117＝1 444 444 443

……

12 345 679×171＝2 111 111 109

聪明的你还能照此举出更多的例子吗？

1.2 代数式及相关运算

1.2.1 代数式及代数式的值

试一试

用字母表示数：

(1)某种瓜子的单价为16元/kg，则购买 n kg瓜子需要$\underline{16n}$元.

(2)小刚上学步行速度为5 km/h，若小刚到学校的路程为 s km，则他上学需要用时为$\underline{\frac{s}{5}}$ h.

(3)钢笔每支 a 元，铅笔每支 b 元，买2支钢笔和3支铅笔共需$\underline{2a+3b}$元.

(4)圆的半径为 r cm，则它的面积为$\underline{\pi r^2}$ cm^2.

(5)长方形的长与宽分别为 a cm，b cm，则该长方形的周长为$\underline{2(a+b)}$cm.

上述问题中出现的式子 $16n$，$\frac{s}{5}$，$2a+3b$，πr^2，$2(a+b)$，我们称它们为代数式.

记一记

【代数式】用代数运算(指加、减、乘、除、乘方、开方)符号把数或表示数的字母连接而成的式子叫作代数式. 单独的一个数或一个字母也是代数式.

【代数式的值】用数值代替代数式里的字母，按照代数式指明的运算，计算出的结果，就叫作代数式的值. 一般地，将代数式化简后再求值.

列代数式(用字母表示数)时在书写格式中几个注意事项：

(1)数与字母相乘，或字母与字母相乘通常使用“·”表示“×”，或省略不写；

(2)数与数相乘，仍应使用“×”表示“乘”，不用“·”表示“乘”，也不能省略乘号；

(3)数与字母相乘时，一般在结果中把数写在字母前面，如 $a\times5$ 应写成 $5a$；

(4)带分数与字母相乘时，要把带分数改成假分数形式，如 $a\times1\frac{1}{2}$ 应写成$\frac{3}{2}a$；

(5)在代数式中出现除法运算时，一般用分数线将被除式和除式联系，如 $3\div a$ 写成$\frac{3}{a}$的形式；

(6)a 与 b 的差写作 $a-b$，要注意字母顺序；若只说两数的差，当分别设两数为 a，b 时，则应分类，写作 $a-b$ 和 $b-a$.

议一议

下列式子中，哪些是代数式？

0，$4x+5y$，$3y$，-10，$2x=3y$，$2+1=3$，$3x>0$.

注：(1)单独的一个数或一个字母也是代数式.

(2)代数式中不含单位，不含“=”“≠”“≤”“≥”.

(3)数与数之间、数与字母之间、字母与字母之间用运算符号连接.

做一做

1. 钢笔每支 5 元，铅笔每支 0.8 元，买 m 支钢笔和 n 支铅笔，应付多少元？

解：应付 $5m+0.8n$ 元.

2. 每个集装箱可装货物 n 吨，那么 15 个集装箱共可装货物多少吨？

解：15 个集装箱共可装货物 $15n$ 吨.

3. 如图 1-4 所示的窗框，上半部为半圆，下半部为六个大小一样的长方形，长方形的长与宽的比为 3∶2，如果长方形的长分别为 0.4 m，0.5 m，0.6 m 等时，分别计算出所需材料的长度.

解：设长方形的长为 a，则宽为 $\frac{2}{3}a$，

这时制作窗框所需材料的长度 $L=8a+9\times\frac{2}{3}a+3a+a\pi=(17+\pi)a$；

当 $a=0.4$ m 时，$L=(17+3.14)\times0.4=8.056$ (m)；

当 $a=0.5$ m 时，$L=(17+3.14)\times0.5=10.07$ (m)；

当 $a=0.6$ m 时，$L=(17+3.14)\times0.6=12.084$ (m).

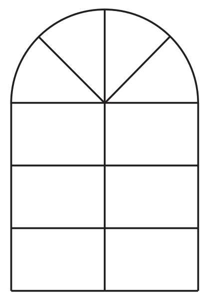


图 1-4

4. 通常情况下，建筑隔墙常用的材料是砖块，而砖块大小通常采用的是 53 mm×115 mm×240 mm，通过不同形式的搭配就有了所谓的 12 cm 墙、24 cm 墙、37 cm 墙、50 cm 墙，但常用的是 24 cm 墙和 37 cm 墙.

要修建一堵长为 a m，宽为 b m 的 24 cm 墙，你能把需要的砖量 y 与 a，b 之间的关系表示出来吗？当这堵 24 cm 墙长 3.5 m 高 2.5 m 需要用砖大约多少块(砖缝忽略不计)？

解：(1)长为 a m，宽为 b m 的 24 cm 墙需要砖量：

$$y=\frac{0.24ab}{0.053\times0.115\times0.24}=\frac{ab}{0.053\times0.115}=\frac{ab}{0.006\ 095}.$$

(2)因此建一个长 3.5 m 高 2.5 m 的 24 cm 墙，需要砖量：

$$y=\frac{3.5\times2.5}{0.006\ 095}\approx1\ 436(\text{块}).$$

5. 某种地砖每块定价 8 元，若购砖不超过 100 块按原价付款；若一次购砖 100 块以上，超 100 块的部分打八折。设一次购砖 x 块，付款金额 y 元，请填下表：

x/块	20	70	100	150	220	$x(x>100)$
y/元	160					

解：当 $x=70$ 时，付款金额 $y=70\times8=560$(元)；

当 $x=100$ 时，付款金额 $y=100\times8=800$(元)；

当 $x=150$ 时，付款金额 $y=100\times8+(150-100)\times8\times0.8=1\ 120$(元)；

当 $x=220$ 时，付款金额 $y=100\times8+(220-100)\times8\times0.8=1\ 568$(元)；

当购砖 $x(x>100)$块时，付款金额 $y=100\times8+(x-100)\times8\times0.8=6.4x+160$(元).

6. 如图 1-5，甲、乙两个零件截面的面积哪个大？大多少？

解：截面甲零件的面积为 πr^2-2ab；截面乙零件的面积 $\pi r^2-1.5ab$；甲、乙两个截面面积的差是 $(\pi r^2-2ab)-(\pi r^2-1.5ab)=-0.5ab<0$. 因此乙零件截面的面积大，大 $0.5ab$.

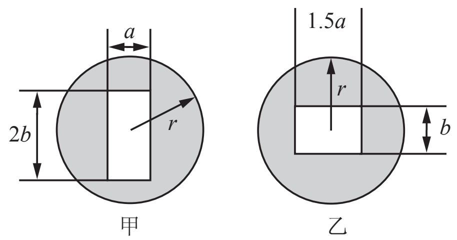


图 1-5

练一练

1. 填空：

(1)n 箱苹果重 p kg，每箱重________ kg；

(2)甲身高 a cm，乙比甲矮 b cm，那么乙的身高为________ cm；

(3)底为 a，高为 h 的三角形面积是________；

(4)全校学生人数是 x，女生占 48%，则女生人数是________，男生人数是________.

(5)某合唱团共有队员 m 人，其中女队员占 58%，则男队员有________人.

(6)汽车以 80 km/h 的速度行驶了 t h 后，又行驶了 12 km，汽车共行驶________ km.

2. 说出下列代数式的意义：

(1)$2a-3c$；　(2)$x+1$；　(3)$ab+1$；　(4)a^2-b^2.

3. 某市出租车收费标准为起步价 10 元，3 km 后按 1.8 元/km 收费. 则某人乘坐出租车 $x(x>3)$km 的付费为多少元？

4. 如图 1-6，用一根长为 12 m 的铝合金，做成一个长方形框，如图 1-6(1)，设框的横条长度为 x(m).（框的厚度忽略不计）

(1)用代数式表示窗框的面积；

(2)若 x 分别取 1 m，2 m，3 m 时，哪一种取法所做成的窗框的面积最大？

变式 1：若是做成如图 1-6(2)所示的一个长方形窗框(中间有横档).

变式 2：若是做成如图 1-6(3)这样有一个半圆和一个长方形组成的窗户，设窗户半径为 x(m).

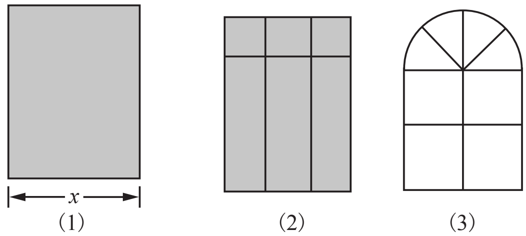


图 1-6

5. 某地电话拨号入网有两种收费方式，用户可任选其一：(A)计时制：0.05 元/min；(B)包月制：50 元/月(限一部个人住宅电话上网). 此外，每一种上网方式都需加收通信费 0.02 元/min.

(1)某用户某月上网时间为 x h，请你分别写出两种收费方式下该用户应该支付的费用；

(2)若某用户估计一个月内上网时间为 20 h，你认为采用哪种方式较为合算？

1.2.2　整式

记一记

【整式】只含有加、减、乘、除、乘方运算的代数式称为有理式. 其中没有除法运算，或虽有除法运算但除式中不含有字母的有理式叫作整式. 整式分单项式和多项式两种.

【单项式】用乘号把数字和字母连接而成的式子，就叫作单项式. 如 $4x$，πr^2，$\frac{1}{2}vt$，$3xyz$ 等，单独的一个数或一个字母也是单项式.

1. 单项式中的数字因数叫作单项式的数字系数，简称系数. 如 $4x$，πr^2，$\frac{1}{2}vt$，$3xyz$ 中，4，π，$\frac{1}{2}$，3 是对应单项式的系数.

2. 单项式中，所有字母的指数之和叫作这个单项式的次数. 如 $4x$ 是一次单项式，πr^2 与 $\frac{1}{2}vt$ 是二次单项式，$3xyz$ 是三次单项式.

【多项式】几个单项式的和，就叫作多项式. 如 $\pi r^2+\frac{1}{2}vt$，$4x-3xyz$.

1. 多项式中的每个单项式叫作这个多项式的项，其中，不含字母的项叫作常数项.

2. 多项式中次数最高的项的次数叫作多项式的次数. 比如 $4x-3xyz$ 中次数最高的项是 $3xyz$，它是三次的，我们称这个多项式为三次多项式.

1.2.3　整式的运算

记一记

1. 合并同类项

所含字母相同，并且相同字母的指数也分别相同的项叫作同类项. 几个常数项也是同类项.

把多项式中的同类项合并成一项的运算叫作合并同类项．其运算法则是把同类项的系数相加，所得的结果作为系数，保持字母和字母的指数不变．

2．去括号和添括号

(1)去括号法则

①括号前面是“＋”号，把括号和它前面的“＋”号去掉，括号里各项都不变号；

②括号前面是“－”号，把括号和它前面的“－”号去掉，括号里各项都变号．

(2)添括号法则

①括号前面是“＋”号，括到括号里的各项都不变号；

②括号前面是“－”号，括到括号里的各项都变号．

3．同底数幂的运算法则(m，n 为整数)

$a^m \times a^n = a^{m+n}$．即同底数幂相乘，底数不变，指数相加；

$a^m \div a^n = a^{m-n}$．($a \neq 0$)即同底数幂相除，底数不变，指数相减．

$(a^m)^n = a^{mn}$；$(ab)^m = a^m b^m$．

4．乘法公式

观察并填空(图 1-7)：

(1)正方形①的面积＝$\underline{a^2}$；长方形②的面积＝$\underline{ab}$；

长方形③的面积＝$\underline{ab}$；正方形④的面积＝$\underline{b^2}$．

(2)大正方形的面积＝$\underline{(a+b)^2\text{ 或 }(a+b)(a+b)}$．

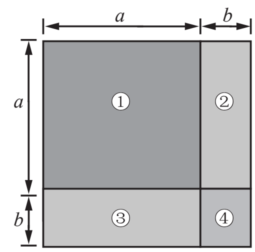


图 1-7

所以由(1)(2)可得

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ab+b^2,$$

即$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$．

类似的公式还有：

平方差公式：$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$；

完全平方差公式：$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$；

立方和与立方差公式：$(a \pm b)(a^2 \mp ab+b^2)=a^3 \pm b^3$；

完全立方和差公式：$(a \pm b)^3=a^3 \pm 3a^2b+3ab^2 \pm b^3$．

5．多项式的因式分解

把一个多项式化为几个整式的积的形式叫作多项式的因式分解．

常用因式分解的方法有以下几种．

①提取公因式法：将多项式中各项的公因式提出来作为一个因式，余下的式子放在括号里作为另一个因式，分解多项式为两个因式的积．

注意：如果多项式第一项的系数是负的，一般要提出“－”号，使括号里第一项的系数为正．

②运用公式法：乘法公式的灵活应用．

③二次三项式的因式分解可用十字相乘法或求根法.

对形如 x^2+px+q 的二次三项式，如果常数项 q 可以分解成两个因数 a，b 的积，而且 $a+b$ 恰好等于一次项系数 p，那么它就可以分解因式，即

$$x^2+px+q=x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b).$$

1.2.4 分式及其运算

记一记

1. 分式：式子中有分母，并且分母中含有字母的代数式叫作分式. 如 $\frac{8}{x-1}$，$\frac{2b}{a-1}$等.

注意： 分式中分母不能为0. 如在$\frac{2}{x-3}$中，$x\neq3$，在$\frac{8}{x}$中，$x\neq0$.

2. 分式的分子与分母都乘(或除以)同一个不等于0的整式时，分式的值不变.

3. 把一个分式的分子和分母的公因式约去，叫作因式的约分.

4. 当一个分式的分子、分母没有公因式时，这个分式就叫作最简分式. 约分时，通常要约到最简分式或整式.

5. 加减运算：$\frac{A}{C}\pm\frac{B}{C}=\frac{A\pm B}{C}$；

$\frac{A}{B}\pm\frac{C}{D}=\frac{AD}{BD}\pm\frac{BC}{BD}=\frac{AD\pm BC}{BD}$($A$，$B$，$C$，$D$ 都为整式).

6. 乘除运算：$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{AC}{BD}$；

$\frac{A}{B}\div\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\cdot\frac{D}{C}=\frac{AD}{BC}$($A$，$B$，$C$，$D$ 都为整式).

7. 乘方运算：$\left(\frac{A}{B}\right)^n=\frac{A^n}{B^n}$($A$，$B$ 都为整式).

1.2.5 二次根式及运算

记一记

形如$\sqrt[n]{a}$的式子叫作根式. 当 n 为奇数时，a 可以是任意实数；当 n 为偶数时，a 不能为负实数.

1. 根指数为2的根式叫作二次根式.

2. $(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant0)$.

3. $\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a, & a\geqslant0,\\-a, & a<0.\end{cases}$

4. $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}(a\geqslant0,\ b\geqslant0)$.

5. $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}(a\geqslant 0，b>0)$.

做一做

1. 先去括号，再合并同类项：

(1)$a+(b-c-a)$；

(2)$a-(b-c-a)$.

解：(1)$a+(b-c-a)=a+b-c-a=b-c$；

(2)$a-(b-c-a)=a-b+c+a=2a-b+c$.

2. 因式分解：

(1)$6x^2-7x-3$；　(2)x^2-5x+6；　(3)$3x^2+6x-3$.

解：(1)$6x^2-7x-3=(2x-3)(3x+1)$；

(2)和(3)略.

3. 某小区一块长方形绿地的造型如图 1-8 所示(单位：m)，其中两个扇形表示绿地，两块绿地用五彩石隔开，那么需要铺多大面积的五彩石？

解：$S_{五彩石}=S_{长方形}-S_{绿地}=a(a+b)-\frac{1}{4}(\pi a^2+\pi b^2)(\mathrm{m}^2)$，

即需要铺的五彩石的面积为

$$a(a+b)-\frac{1}{4}(\pi a^2+\pi b^2)(\mathrm{m}^2).$$

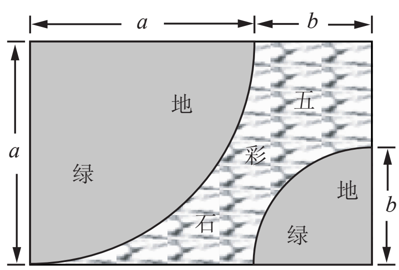


图 1-8

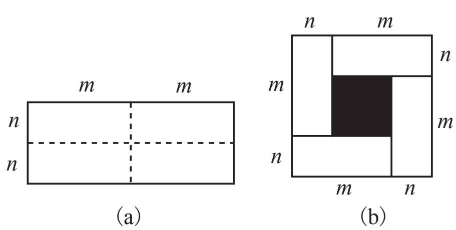


图 1-9

4. 图 1-9(a)是一个长为 2 m、宽为 2 n 的长方形，沿图中虚线用剪刀均分成四块小长方形，然后按图 1-9(b)的形状拼成一个正方形.

(1)你认为图 1-9(b)中的阴影部分的正方形的边长等于多少？

(2)请用两种不同的方法求图 1-9(b)中阴影部分的面积；

(3)观察图 1-9(b)你能写出下列三个代数式之间的等量关系吗？

代数式：$(m+n)^2$，$(m-n)^2$，mn. ________

(4)根据第(3)题中的等量关系，解决如下问题：

若 $a+b=7$，$ab=5$，则$(a-b)^2=$________.

解：(1)阴影部分的正方形的边长为 $m-n$.

(2)方法 1：用大正方形的面积减四个长方形的面积来计算，阴影部分的正方形的面积$=(m+n)^2-4mn$；

方法 2：根据阴影部分的正方形的边长 $m-n$，求得阴影部分的正方形的面积$=(m-n)^2$.

(3)由(1)(2)得$(m+n)^2-4mn=(m-n)^2$.

(4)若 $a+b=7$，$ab=5$，则$(a-b)^2=(a+b)^2-4ab=49-4\times5=29$.

综合练习

一、选择题

1. 点 A 在数轴上表示$+2$，从点 A 沿数轴向左平移 3 个单位长度到点 B，则点 B 所表示的实数是(　　).

A. 3　　B. -1　　C. 5　　D. 1 或 3

2. 某市加大财政支农力度，全市农业支出累计达到 234 760 000 元，其中 234 760 000 元用科学记数法可表示为(　　)元.（保留三位有效数字）

A. 2.34×10^8　　B. 2.35×10^8　　C. 2.35×10^9　　D. 2.34×10^9

3. 一个塑料袋丢弃在地上的面积约占 0.023 m^2，如果 100 万个旅客每人丢一个塑料袋，那么会污染的最大面积用科学记数法表示是(　　).

A. $2.3\times10^4\ \mathrm{m}^2$　B. $2.3\times10^6\ \mathrm{m}^2$　C. $2.3\times10^3\ \mathrm{m}^2$　D. $2.3\times10^{-2}\ \mathrm{m}^2$

4. 下列运算正确的是(　　).

A. $x^2\cdot x^2=2x^4$　B. $(x^2)^3=x^8$　C. $x^4\div x^2=x^2$　D. $x^4\cdot x^2=x^8$

5. 某同学做如下运算题：

①$x^5+x^5=x^{10}$；　②$x^5-x^4=x$；　③$(-xy)^2=x^2y^2$；　④$3\sqrt{2}x+2\sqrt{3}x=5\sqrt{5}x$；⑤$(x^5)^2=x^{25}$；　⑥$16x^2-7x^2=9$.

其中结果正确的是(　　).

A. ①②④　　B. ②④　　C. ③　　D. ④⑤

6. 某校师生总人数为 1 000 人，其中男学生、女学生和教师所占的比例如图 1-10 所示，则该校男学生人数为(　　).

A. 430 人　　B. 450 人

C. 550 人　　D. 570 人

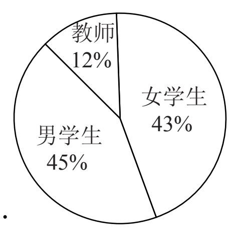


图 1-10

7. 如果向前运动 5 m 记作$+5$ m，那么向后运动 3 m，记作(　　).

A. 8 m　　B. 2 m　　C. -3 m　　D. -8 m

8. 在下列各式由左边到右边的变形中，是分解因式的为(　　).

A. $a(x+y)=ax+ay$　　B. $x^2-4x+4=x(x-4)+4$

C. $10x^2-5x=5x(2x-1)$　　D. $x^2-16+3x=(x+4)(x-4)+3x$

9. 下列分式的运算中，其中结果正确的是(　　).

A. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2}{a+b}$　　B. $\frac{(a^3)^2}{a}=a^3$

C. $\frac{a^2+b^2}{a+b}=a+b$　　D. $\frac{a-3}{a^2-6a+9}=\frac{1}{a-3}$

10. 某商场 2006 年的销售利润为 a，预计以后每年比上一年增长 $b\%$，那么 2008 年该商场的销售利润将是(　　).

A. $a(1+b)^2$　B. $a(1+b\%)^2$　C. $a+a(b\%)^2$　D. $a+ab^2$

二、填空题

1. 据最新统计，某地户籍人口约为 7 020 000 人，用科学记数法表示是________人.

2. 吐鲁番盆地低于海平面 155 m，记作−155 m，福州鼓山绝顶峰高于海平面 919 m，记作________ m.

3. 班级学生总数为 x，其中男生占 52%，男生人数为________.

4. 修建一条经过我市的高速公路，一项土石方工程计划 100 天完成，前 30 天完成了 10 万方，剩下的时间每天完成 x 万方，用代数式表示这项土石方工程共________万方.

5. 张大伯从报社以每份 0.4 元的价格购进了 a 份报纸，以每份 0.5 元的价格售出了 b 份报纸，剩余的报纸以每份 0.2 元的价格退回报社，则张大伯卖报收入________元.

6. 苹果的售价为 a 元/kg，梨的售价为 b 元/kg，则购买 5 kg 苹果和 6 kg 梨共需付________元.

7. 某种建筑板材，原来每件成本是 a 元，现在每件成本降低 $x\%$. 该建筑板材现在每件成本为________元.

8. 如果一个数的百位数字是 a，十位数字是 b，个位数是 c，那么这个三位数用代数式表示是________；若这个三位数的十位数字和百位数字对调后所得的新三位数是________.

9. 用同样大小的黑、白两种颜色的棋子摆设如图 1-11 所示的正方形图案，则第 n 个图案需要用白色棋子________枚.（用含有 n 的代数式表示）

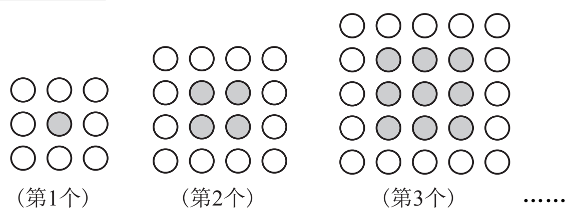


图 1-11

10. 化简：$(-2x)^2+(6x^3-12x^4)\div(3x^2)=$________.

三、解答题

1. 计算：$2005^0-2^2+|-5|$.

2. 计算：$|-\sqrt{5}|-\dfrac{5}{\sqrt{5}}+\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-1}+(-1)^{2004}$.

3. 请你将下式化简，再求值：

$(x+2)(x-2)+(x-2)^2+(x-4)(x-1)$. 其中 $x^2-3x=1$.

4. 五一期间几位好朋友包租了一辆车准备到兴隆山的几个景点游玩，租金为 400 元。出发时，又增加了 2 个人，总人数达到 m 人，那么开始包车的几位朋友平均每人可比原来少分摊多少钱?

5.《某省工伤保险条例》规定：职工有依法享受工伤保险待遇的权利，某单位一名职工因公受伤住院治疗了一个月(按 30 天计)，用去医疗费 5 000 元，伙食费 500 元，工伤保险基金按规定给他补贴医疗费 4 500 元，其单位按因公出差标准(每天 30 元)的 70%补助给他做伙食费，则在这次工伤治疗中他自己只需支付多少元?

6. 某动物园的门票价格是成人票每张 10 元，学生票每张 5 元。一个旅游团有成人 x 人、学生 y 人，(1)那么该旅游团应付多少门票费?(2)如果该旅游团有 37 个成人、15 个学生，那么他们应付多少门票费?

7. 某拖拉机开始耕地时油箱存油 40 kg，耕地时间 t 与油箱剩油量 Q 之间关系如下：

时间(t)/h	1	2	3	4	5
剩油(Q)/kg	34	28	22	16	10

写出时间 t 与剩油量 Q 的函数关系式。当 Q 为 25 kg 时，t 是多少?

8. 社会的信息化程度越来越高，计算机网络已进入普通百姓家，某市电信局对计算机拨号上网用户提供三种付费方式供用户选择(每个用户只能选择其中一种付费方式)：甲种方式是按实际用时付费，信息费 4 元/h，另加付电话费 1.2 元/h；乙种方式是月包制，每月付信息费 100 元，同样加付电话费 1.2 元/h；丙种方式也是月包制，每月付信息费 250 元，但不必再另付电话话费.

(1)设某户某月上网时间为 t h，试用 t 的代数式表示三种付费公式 y；

(2)试判断哪种付费方式优惠；

(3)小王为选择合适的付费方式，连续记录了 7 天中每天上网所花的时间：

(单位：min)

	第一天	第二天	第三天	第四天	第五天	第六天	第七天
上网时间	62	40	35	74	27	60	80

根据以上结论，你认为小王应选哪种方式付费比较合适? 并说明理由.

趣味数学

1. 分数的妙用.

有一位阿拉伯老人，生前养有11匹马，他去世前立下遗嘱：大儿子、二儿子、小儿子分别继承遗产的$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{6}$。儿子们想来想去没法分：他们所得到的都不是整数，即分别为$\frac{11}{2}$，$\frac{11}{4}$，$\frac{11}{6}$. 总不能把一匹马割成几块来分吧?

聪明的邻居牵来了自己的1匹马，对他们说："你们看，现在有12匹马了，老大得12匹的1/2，就是6匹，老二得12匹的1/4就是3匹，老三得12匹的1/6就是2匹，还剩下一匹我照样牵回家去."

2. 鸡蛋的数量.

往一个篮子里放鸡蛋，假定篮子里的鸡蛋数目每分钟增加1倍，这样下去，12 min后，篮子满了. 那么，你知道在什么时候是半篮子鸡蛋吗?

模块 2　方程与不等式

2.1　方程

2.1.1　等式、方程

记一记

【等式】用“＝”来表示相等关系的式子，叫作等式.

1. 等式两边分别加(或减)同一个数或同一个整式，所得结果仍是等式；

2. 等式两边都乘(或除以)同一个数或同一个整式(除数不能为 0)，所得结果仍是等式.

【方程】含有未知数的等式叫作方程.

1. 方程中的未知数叫作元，方程中有几个未知数就叫作几元方程；

2. 方程中未知数的最高次数叫作方程的次数；

3. 方程中不含未知数的项叫作常数项；

4. 使方程左右两边的值相等的未知数的值，叫作方程的解(方程的解也叫作方程的根)；

5. 求方程的解(或根)的过程叫作解方程；

6. 一般要对求得的方程的根进行检验，特别是有约束条件的方程和用方程解决的实际问题.

2.1.2　一元一次方程(组)及其求解

想一想

一个由父亲、母亲、叔叔和 x 个孩子组成的家庭去某地旅游，甲旅行社的收费标准是：如果买 4 张全票，则其余按半价优惠；乙旅行社的收费标准是：家庭旅游算团体票，按原价的 $\frac{3}{4}$ 优惠。这两家旅行社的原价均为每人 100 元。在考虑选择旅行社时，母亲说，按我们家来的人数两家旅行社的收费一样. 请问这个家庭参加旅游的孩子共有几个?

分析：设共有 x 个孩子参加旅游，

甲旅行社的收费是：$4\times100+(x-1)100\times\frac{1}{2}=350+50x$；

乙旅行社的收费是：$(3+x)100\times\frac{3}{4}=225+75x$.

当 $350+50x=225+75x$ 时，$x=5$，即当有 5 个孩子参加旅游时，根据标准甲、乙两家旅行社的收费是一样的.

记一记

像 $350+50x=225+75x$ 一样，只含有一个未知数，并且未知数的最高次数为 1，系数不为 0 的整式方程叫作一元一次方程，即形如 $ax+b=0(a\neq0)$ 的方程叫作一元一次方程.

【一元一次方程的求解步骤】1. 去括号；2. 移项；3. 合并同类项；4. 系数化为 1；5. 检验.

做一做

1. 解方程：$5(x-1)=3(2-3x)-2(x+5)$.

解：去括号，得　$5x-5=6-9x-2x-10$，

移项，得　$5x+9x+2x=6-10+5$，

合并同类项，得　$16x=1$，

两边同除以 16，得　$x=\frac{1}{16}$.

将 $x=\frac{1}{16}$ 代入原方程，得

左边 $=-4\frac{11}{16}$，右边 $=-4\frac{11}{16}$，

因为，左边 = 右边，

所以，$x=\frac{1}{16}$ 是方程的根（或解）.

2. 地板砖厂的坯料由白土、沙土、石膏、水按 25∶2∶1∶6 的比例配制搅拌而成。现已将前三种原料称量好，共 5 600 kg，应加多少千克的水搅拌？前三种料各称量了多少千克？

分析：本题是比例问题，可按比例设未知数，并根据题设中的相等关系列出方程进行求解.

解：由四种坯料比例 25∶2∶1∶6，设四种坯料分别为 $25x$ kg，$2x$ kg，x kg，$6x$ kg.

由前三种坯料共 5 600 kg，得　$25x+2x+x=5\ 600$，

合并同类项，得　$28x=5\ 600$，

两边同除以 28，得 $x=200$，

则 $25x=5\ 000$，$2x=400$，$x=200$，$6x=1\ 200$.

答：应加 1 200 kg 的水搅拌. 前三种料各分别称了 5 000 kg，400 kg，200 kg.

练一练

1. 参照图 2-1 所示列出方程并求解.

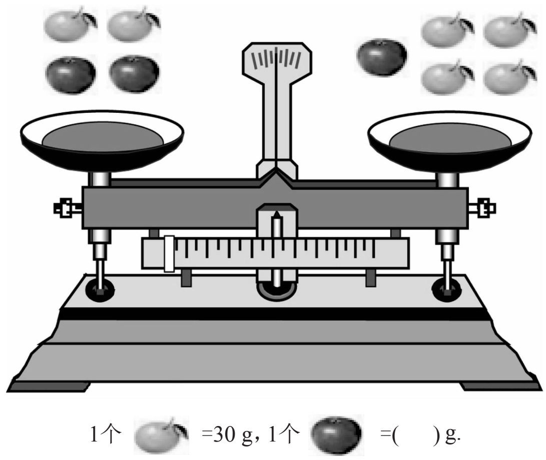


图 2-1

2. 解方程：$50(2x-3)=80-15x$.

3. 建筑工人在施工中，使用一种混凝土，是由水、水泥、黄沙、碎石搅拌而成的，这四种原料的质量比是 0.7∶1∶2∶4.7，搅拌这种混凝土 2 100 kg，分别需要水、水泥、黄沙、碎石多少千克？

想一想

学校召开运动会，李涛负责给同学们购买饮料. 现在要选购两种饮料共 56 瓶，其中苏打水 2.5 元一瓶，茶饮料 2 元一瓶. 李涛计划恰好花费 120 元购买这些饮料，那么两种饮料应该各买多少瓶呢？

若设购买苏打水的数量为 x 瓶，购买茶饮料的数量为 y 瓶，根据题意可得：

$x+y=56$；$2.5x+2y=120$.

如何解这两个方程呢？

2.1.3　二元一次方程组及其求解

记一记

【二元一次方程组】上面问题中产生的方程 $x+y=56$，$2.5x+2y=120$，如果把它们写为$\begin{cases} x+y=56, & (1) \\ 2.5x+2y=120, & (2) \end{cases}$像这样由几个二元一次方程组成一组，叫作二元一次方程组.

【二元一次方程组的求解方法】1. 加减消元法；2. 代入消元法.

下面通过举例来学习二元一次方程组的求解方法.

方程组$\begin{cases}x+y=56, & (1)\\ 2.5x+2y=120. & (2)\end{cases}$

解法 1：(加减消元法)

先将(1)式左右两边同乘数 2，得

$$2x+2y=112, (3)$$

再用(2)－(3)，得

$$0.5x=8,$$

解得 $x=16$，

把 $x=16$ 代入(1)式中，得

$$16+y=56,$$

即 $y=40$，

所以原方程组的解是$\begin{cases}x=16,\\ y=40.\end{cases}$

即购买苏打水的数量为 16 瓶，那么购买茶饮料的数量就为 40 瓶.

解法 2：(代入消元法)

$\begin{cases}x+y=56, & (1)\\ 2.5x+2y=120. & (2)\end{cases}$

由(1)式得 $y=56-x$，代入(2)式得 $2.5x+2(56-x)=120$.

解之有 $0.5x=8$，$x=16$，

把 $x=16$ 代入(1)式中，得

$$16+y=56,$$

即 $y=40$，

所以原方程组的解是$\begin{cases}x=16,\\ y=40.\end{cases}$

练一练

1. 解方程组：(1)$\begin{cases}2x+y=5,\\ x-3y=6;\end{cases}$ (2)$\begin{cases}2x-y=5,\\ x+y=4.\end{cases}$

2. 一块矩形草坪的长比宽的 2 倍多 10 m，它的周长是 132 m，则宽和长分别为多少？

2.1.4 一元二次方程及其解法

想一想

为落实国务院房地产调控政策，使“居者有其屋”，某市加快了廉租房的建设力度. 2011 年市政府共投资 2 亿元人民币建设了廉租房 80 000 m^2，预计到 2013 年底三年累计投资 9.5 亿元人民币建设廉租房，若在这两年内每年投资的增长率相同. 那么每年市政府投资

的增长率是多少呢？

分析：设每年市政府投资的增长率为 x，根据题意，得：$2+2(1+x)+2(1+x)^2=9.5$，整理，得 $x^2+3x-1.75=0$.

解此方程即可得出结论.

记一记

在实际问题中会产生类似于 $x^2+3x-1.75=0$ 的整式方程，这种方程只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 2，最高次项的系数不为 0. 这样的方程就叫作一元二次方程. 一元二次方程的一般形式为 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$.

【一元二次方程的求解方法】

1. 直接开平方法：如果 $x^2=a(a\geqslant0)$，则 $x=\pm\sqrt{a}$，即 $x_1=\sqrt{a}$，$x_2=-\sqrt{a}$.

2. 配方法：由 $ax^2+bx+c=0$，得 $a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=\dfrac{b^2-4ac}{4a}$，两边开方化简即可.

3. 公式法：应用一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$的求根公式，即

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\quad(b^2-4ac\geqslant0).\tag{2-1}$$

通常记 $\Delta=b^2-4ac$，叫作一元二次方程根的判别式.

当 $\Delta>0$ 时，方程有两个不相等的实数根：

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}，\ x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a};$$

当 $\Delta=0$ 时，方程有两个相等的实数根：

$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a};$$

当 $\Delta<0$ 时，方程无实数根.

4. 因式分解法：多用乘法公式和十字相乘法，比如 $x^2+px+q=x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$.

做一做

1. 解方程：$x^2-x-2=0$.

解：把方程的左边进行因式分解，得

$(x-2)(x+1)=0$,

使 $x-2=0$，得 $x_1=2$，

使 $x+1=0$，得 $x_2=-1$，

所以原方程的根是 $x_1=2$，$x_2=-1$.

2. 解方程：$x^2+4x-5=0$.

解：方程 $x^2+4x-5=0$ 变形为

$x^2+4x+4-9=0$，

应用配方法、完全平方公式得

$(x+2)^2=9$.

则 $x+2=\pm3$，所以原方程的解为 $x_1=1$，$x_2=-5$.

3. 利用求根公式判断方程：$2x^2+5x+3=0$ 是否有实数根，若有，求出结果.

解： 因为 $\Delta=b^2-4ac=5^2-4\times2\times3=1>0$，所以该方程有两个不相等的实数根.

将 $2x^2+5x+3=0$ 中对应数 $a=2$，$b=5$，$c=3$，代入求根公式(2-1)中，得

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{25-24}}{4}=\frac{-5\pm1}{4},$$

所以原方程的根是

$$x_1=-\frac{3}{2}，x_2=-1.$$

练一练

1. 不解方程，判断下列各方程的根的情况：

(1)$6x^2-5x-3=0$；(2)$x^2=x-3$；(3)$x^2-2x+1=0$.

2. 干面粉经加水发酵后，质量可以增加 1.5 倍. 供应学生早餐需 36 kg 馒头，问需要多少千克干面粉？

3. 一条路长 2.5 km，甲乙两个学生从两端同时出发，相向而行. 甲骑自行车，速度是 20 km/h，乙步行，经过 6 min 后两人相遇，求乙步行的速度.

4. 某工程队在城市实施棚户区改造工程中承包了一项拆迁工程，原计划每天拆迁 1 250 m^2，因准备工作不足，第一天少拆迁了 20%，从第二天开始，该工程队加快了拆迁速度，第三天拆迁了 1 440 m^2.

(1)求该工程队第一天拆迁的面积；

(2)若该工程队第二天、第三天每天的拆迁面积与前一天的拆迁面积增长的百分数相同，求这个百分数.

2.2 不等式

2.2.1 不等式的概念

在我们的生活中存在大量的不等关系，如图 2-2 和图 2-3 所示的实例.

图 2-2

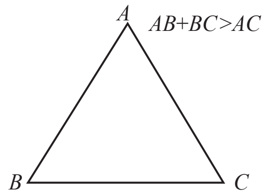


图 2-3

在建筑材料课程中，我们会学习钢筋的相关知识. 表 2-1 是有关钢筋强度的一些实测值，你知道它们表示的含义吗？

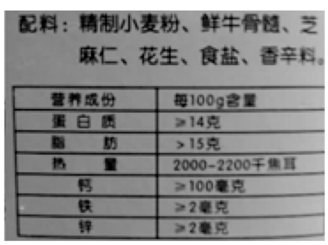
表 2-1 钢筋的强度等级实测值

强度等级		屈服强度/MPa	抗拉强度/MPa	断后伸长率/%
HRB335	⩾	335	455	17
HRB400	⩾	400	540	16
HRB500	⩾	500	630	15

想一想

(1)某品牌油茶中，每 100 g 中含蛋白质 x g、含脂肪 y g、含钙 z mg、含铁 m mg、含锌 n mg，该油茶的营养成分如图 2-4 所示，那么如何表示各成分在其中的含量呢？

显然可表示为 $x \geqslant 14$ g，$y > 15$ g，$z \geqslant 0.1$ g，$m \geqslant 0.002$ g，$n \geqslant 0.002$ g.



配料：精制小麦粉、鲜牛骨髓、芝麻仁、花生、食盐、香辛料。

营养成份	每100g含量
蛋白质	≥14克
脂肪	>15克
热量	2000-2200千焦耳
钙	≥100毫克
铁	≥2毫克
锌	≥2毫克

图 2-4

(2)公路上，经常会遇到图 2-5 所示的标志，你们知道它们都表示什么意思吗？

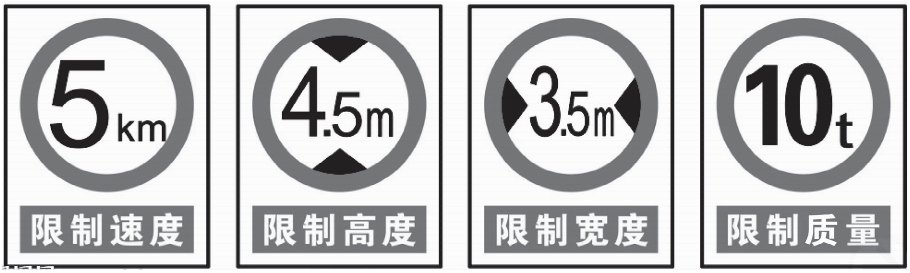


图 2-5

若车辆速度用 x 表示、高度用 y 表示、宽度用 z 表示、总质量用 m 表示，则 $x\leqslant 5$，$y\leqslant 4.5$，$z\leqslant 3.5$，$m\leqslant 10$.

(3)细心的同学会发现水泥袋上写着净重为 50 ± 1 kg(图 2-6)，那么它表示什么意思呢？

图 2-6

净重若用 x 表示，则净重含量的范围在 $50-1\leqslant x\leqslant 50+1$.

记一记

像 $2x+3>5$，$1-3x<4$，$ax^2+bx+c\geqslant 0$ 一样，用不等号表示不等关系的式子叫作不等式. 不等号的形式有以下几种：$<$，$>$，$\leqslant$，$\geqslant$，$\neq$，读作小于、大于、小于等于、大于等于、不等于.

比较数的大小有如下几种方法.

(1)作差比较法

$a-b>0\Leftrightarrow a>b$；$a-b=0\Leftrightarrow a=b$；$a-b<0\Leftrightarrow a<b$.

作差比较法步骤：

①作差；②代数式整理变形；③判断符号；④结论.

(2)作商比较法

不等式两边如果是乘积的形式或者幂，指数式时，我们可采用作商比较法.

若 $a>0$，$b>0$，则 $\frac{a}{b}>1\Leftrightarrow a>b$；$\frac{a}{b}=1\Leftrightarrow a=b$；$\frac{a}{b}<1\Leftrightarrow a<b$.

若 $a<0$，$b<0$，则 $\frac{a}{b}>1 \Leftrightarrow a<b$；$\frac{a}{b}=1 \Leftrightarrow a=b$；$\frac{a}{b}<1 \Leftrightarrow a>b$.

作商比较法步骤：

①作商；②代数式整理变形；③判断商与 1 的大小；④结论.

做一做

1. 比较 $\frac{4}{5}$ 和 $\frac{5}{6}$ 的大小.

解法一(作差比较法)：$\frac{4}{5}-\frac{5}{6}=\frac{24-25}{30}<0$，所以 $\frac{4}{5}<\frac{5}{6}$.

解法二(作商比较法)：$\frac{4}{5}/\frac{5}{6}=\frac{24}{25}<1$，所以 $\frac{4}{5}<\frac{5}{6}$.

2. 比较 $1+\sqrt{2}$ 与 2 的大小.

解：$1+\sqrt{2}-2=\sqrt{2}-1=\sqrt{2}-\sqrt{1}>0$，

所以 $1+\sqrt{2}>2$.

练一练

1. 用符号“＞”或“＜”填空.

(1) $-\frac{53}{64}$______ $-\frac{7}{8}$；　　(2) $\frac{4}{3}$______ $\frac{7}{6}$；

(2) $\sqrt{2}$______ $\sqrt{3}$；　　(4) $\sqrt[3]{64}$______ $\frac{17}{4}$.

2. 试一试将下列各数按照从大到小的顺序排列.

0，-1.32，$\frac{2}{3}$，$\sqrt{2}$，$-\sqrt[3]{8}$，0.666，π.

2.2.2　不等式的基本性质

记一记

1. 对称性：如果 $x>y$，那么 $y<x$；如果 $y<x$，那么 $x>y$；

2. 传递性：如果 $x>y$，$y>z$；那么 $x>z$；

3. 加法法则：如果 $x>y$，而 z 为不等于 0 的任意实数或整式，那么 $x+z>y+z$，即不等式的两边加(或减)同一个数不等号的方向不变；

4. 乘法法则：如果 $x>y$，$z>0$，那么 $xz>yz$；如果 $x>y$，$z<0$，那么 $xz<yz$；即不等式两边同时乘(或除以)一个正数不等号的方向不变；不等式两边同时乘(或除以)一个负数不等号的方向改变.

做一做

应用不等式的性质比较大小：

(1)设 $a>b$，$a-5$ ______ $b-5$；

(2)已知 $a>b>0$，$c>d>0$，则 ac ______ bd；

解：(1)应用不等式的加法法则______________不等式的两边加(或减)同一个数不等号的方向不变，所以 $a-5>b-5$.

(2)因为 $a>b$，$c>0$ 应用不等式的乘法法则______________如果 $x>y$，$z>0$，那么 $xz>yz$；所以 $ac>bc$，同理因为 $c>d$，$b>0$，所以 $bc>bd$.

根据不等式的性质，$ac>bd$.

练一练

用符号“>”或“<”填空，并说明应用了不等式的哪条性质？

设 $a<b$，则(1)$-\sqrt{3}a$ ______ $-\sqrt{3}b$；(2)$3a$ ________ $3b$；(3)$-5-5a$ ______ $-5-5b$.

2.2.3　一元一次不等式

议一议

三人住旅店，每人每天的价格是 10 元，每人付了 10 元钱，总共给了老板 30 元，后来老板优惠了 5 元，让服务员退给他们，结果服务员贪污了 2 元，剩下 3 元每人退了 1 元钱，也就是说每人消费了 9 元钱. 三个人总共花了 27 元，加上服务员贪污的 2 元总共 29 元. 那 1 元钱到哪去了？

记一记

形如 $ax+b>0$(或$\geqslant 0$)，$ax+b<0$(或$\leqslant 0$)，不等式中只含有一个未知数 x，并且 x 的次数是 1，系数 a 不为 0 这样的不等式叫作一元一次不等式.

【不等式的解集】一个含有未知数的不等式的所有的解，组成这个不等式的解集.

例如：不等式 $x-5\leqslant -1$ 的解集为 $x\leqslant 4$；不等式 $x>0$ 的解集是所有的正实数.

【解不等式】求不等式解集的过程叫解不等式.

一元一次不等式的解法：一元一次不等式解法的理论依据是不等式的基本性质.

解一元一次不等式的一般步骤：去分母→去括号→移项→合并同类项→系数化为 1.

注意：不等式两边同时乘(或除以)一个负数不等号的方向改变.

做一做

1. 解下列不等式，并将解集在数轴上表示出来.

(1)$x-4<-5$；　　　　(2)$\dfrac{2x-3}{7}\geqslant\dfrac{3x+2}{4}$.

解：(1)移项得 $x<-5+4$，

$x<-1$(图 2-7).

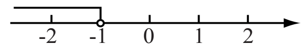


图 2-7

(2)去分母得　　　$4(2x-3)\geqslant 7(3x+2)$，

去括号得　　　$8x-12\geqslant 21x+14$，

移项得　　　$8x-21x\geqslant 14+12$，

合并同类项得　　　$-13x\geqslant 26$，

系数化为 1 得　$x\leqslant -2$(图 2-8).

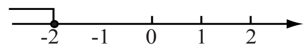


图 2-8

2. 兰州市出租车原计价方式为 3 km 以内 7 元，超出 3 km 后按1.4 元/km(假设每千米计价一次，不考虑其他因素)收费，现计划对此价格进行调整，有以下两种方案：

(1)起步价调整为 3 km 以内 10 元，其他不变；

(2)起步价调整为 2 km 以内 6 元，超出 2 km 后按 1.6 元/km 收费.

试问：行驶多少千米后第一种方案比第二种方案优惠？

解：设行驶 x 千米后第一种方案比第二种方案优惠，则

$10+(x-3)\times 1.4-[6+(x-2)\times 1.6]<0$，

整理后得：$x>15$.

答：行驶 15 km 后第一种方案比第二种方案优惠.

3. 在方程部分提到的案例：一个由父亲、母亲、叔叔和 x 个孩子组成的家庭去某地旅游，甲旅行社的收费标准是如果买 4 张全票，则其余按半价优惠；乙旅行社的收费标准是家庭旅游算团体票，按原价的$\frac{3}{4}$优惠。这两家旅行社的原价均为每人 100 元。试根据参加旅游孩子的人数，比较哪家旅行社的收费额更优惠呢？

分析：设共有 x 个孩子参加旅游，

甲旅行社的收费是：$4\times 100+(x-1)100\times\frac{1}{2}=350+50x$；

乙旅行社的收费是：$(3+x)100\times\frac{3}{4}=225+75x$.

当 $350+50x>225+75x$ 时，得 $x<5$，即当参加旅游的孩子少于 5 个时，甲旅行社的收费多，报乙旅行社合算；当 $350+50x<225+75x$ 时，得 $x>5$，即当超过 5 个孩子参加旅游时，甲旅行社的收费少，报甲旅行社合算.

想一想

假设五泉山公园的门票为 5 元/人，一次团购 50 张可每张优惠 1 元，现有某个班级共 45 人组织去爬山，当班长准备到售票处购买 45 张票时，数学课代表提议让班长买 50 张票，如果你是班长，你计划购买 45 张还是 50 张票呢？当班级的人数达到多少人时，采用团购方式更合算？

练一练

(1)解不等式：$3x-7<4(x+2)$.

(2)解不等式，并把数集在数轴上表示出来：

$$\frac{3}{2}x-\left(\frac{1}{3}+x\right)\leqslant -4x.$$

(3)当 x 为何值时，代数式$\frac{x-5}{3}$的值与代数式$\frac{2x-7}{2}$的值之差不小于 2？

2.2.4　一元一次不等式组

记一记

把含有相同未知数的几个一元一次不等式合在一起，就组成了一个一元一次不等式组.

【一元一次不等式组的解集】几个一元一次不等式的解集的公共部分，叫作它们所组成的一元一次不等式组的解集.

【解不等式组】求不等式组解集的过程叫解不等式组.

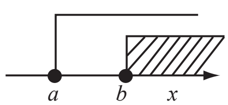
一元一次不等式组的解法：

先求出不等式组中每一个不等式的解集，再利用数轴求出这些不等式解集的公共部分(阴影部分)，即为不等式组的解集. 若公共部分不存在，则不等式组的解集为空集.

议一议

同学之间相互讨论，试着完成表 2-2，(假设 $a<b$).

表 2-2

不等式组	图示(阴影部分)	解集
$\begin{cases}x\geqslant a,\\ x\geqslant b\end{cases}$		$x\geqslant b$
$\begin{cases}x\leqslant a,\\ x\leqslant b\end{cases}$		
$\begin{cases}x\leqslant a,\\ x\geqslant b\end{cases}$		
$\begin{cases}x\geqslant a,\\ x\leqslant b\end{cases}$		

做一做

1. 解不等式组，并将解集在数轴上表示出来.

(1) $\begin{cases} 3-2x<-5, & ① \\ x-2\geqslant 2x; & ② \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} \dfrac{2-3x}{2}+4\geqslant x, & ① \\ 2-2(x+2)<-x. & ② \end{cases}$

解：(1)　解不等式①得

$$x>4. \qquad ③$$

解不等式②得　$x\leqslant -2.$　　④

作出③④的数轴表示(图2-9).

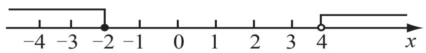


图 2-9

观察图形，得到不等式组的解为无解.

(2)解不等式①得

$2-3x+8\geqslant 2x,$

$-5x\geqslant -10,$

得　$x\leqslant 2.$　　③

解不等式②得

$2-2x-4<-x,$

$-2x+x<4-2,$

得　$x>-2.$　　④

作出③④的数轴表示(图2-10).

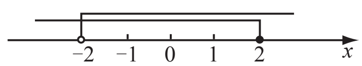


图 2-10

观察图形，得到不等式组的解为$-2<x\leqslant 2$.

2. 小明为城建学校走读学生，学校和他家之间的距离为1 800 m，假设小明早上7：30从家出发步行至学校，计划7：50～8：00之间到达学校，若小明的步行速度为x m/min，求小明步行速度的范围是多少才能按时到达学校？

解：根据题意可列不等式组

$\begin{cases} 20x\leqslant 1\,800, & (1) \\ 30x\geqslant 1\,800. & (2) \end{cases}$

解不等式(1)得$x\leqslant 90$.　　(3)

解不等式(2)得$x\geqslant 60$.　　(4)

作出(3)(4)的数轴表示(图2-11).

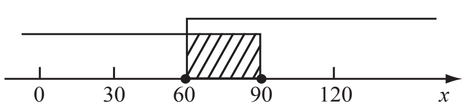


图 2-11

观察图形，得到不等式组的解为 $60\leqslant x\leqslant 90$.

所以小明步行的速度是 60～90 m/min 才能按时到达学校.

练一练

1. 解下列不等式组，并将解集在数轴上表示出来.

(1) $\begin{cases}4x-3<2x+3,\\ \dfrac{8-x}{3}<x;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}6x+12>0,\\ 3x+6\geqslant 4x+4.\end{cases}$

2. 某校在一次外出郊游中，把学生编为 9 个组，若每组比预定的人数多 1 人，则学生总数超过 200 人；若每组比预定的人数少 1，则学生总数不到 190 人，求预定每组学生的人数.

3. 张红家离学校 1 600 m，一天早晨由于有事耽误，结果吃完饭时离上课只有 15 min 的时间，忙中出错，出门时忘了带书包，结果又回到家取书包共用了 3 min，只好坐小汽车去上学，小汽车的速度是 36 km/h，小汽车行驶了 1.5 min 后发生堵车，她等了 0.5 min 后，路还没有畅通，于是下车又开始步行. 问：张红步行速度至少是（　　）时，才不至于迟到.

A. 60 m/min　　B. 70 m/min　　C. 80 m/min　　D. 90 m/min

2.2.5　一元二次不等式

记一记

形如 $ax^2+bx+c>0(\geqslant 0)$ 或 $ax^2+bx+c<0(\leqslant 0)(a\neq 0)$，不等式中只含有一个未知数 x，并且 x 的最高次数是 2，系数 a 不为 0 这样的不等式叫作一元二次不等式. 例如 $x^2+x+2\geqslant 0$，$-2x^2-3<4$ 等. 对于二次项系数为负数的不等式，可以利用不等式的乘法法则，两边同时乘 -1，将二次项系数化为我们熟悉的正数形式，然后求解. 下面我们以 $ax^2+bx+c>0(\geqslant 0)$ 或 $ax^2+bx+c<0(\leqslant 0)(a\neq 0)$ 且 $a>0$ 为例来进行一元二次不等式的学习.

一元二次不等式的解法的基本步骤：

(1) 转化为一般形式 $ax^2+bx+c>0(\geqslant 0)$ 或 $ax^2+bx+c<0(\leqslant 0)$；

(2) 将 ax^2+bx+c 分解因式；

(3) 转化为一元一次不等式组并求解；

(4) 写出一元二次不等式的解集.

做一做

1. 求不等式 $x^2-x-6>0$ 的解集.

解： 利用十字相乘法分解因式，

得 $(x-3)(x+2)>0$.

根据两数相乘，同号得正异号得负法则

$\begin{cases}x-3>0,\\x+2>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x-3<0,\\x+2<0.\end{cases}$

解一元一次不等式组得

$\begin{cases}x>3,\\x>-2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<3,\\x<-2.\end{cases}$

即 $x>3$ 或 $x<-2$，

所以原不等式组的解为 $x>3$ 或 $x<-2$.

2. 解不等式 $-2x^2+x\geqslant-1$.

解： $-2x^2+x+1\geqslant0$，即

$2x^2-x-1\leqslant0$，

分解因式有

$(2x+1)(x-1)\leqslant0$.

根据两数相乘，同号得正异号得负法则

$$\begin{cases}x-1\leqslant0,\\2x+1\geqslant0\end{cases} 或 \begin{cases}x-1\geqslant0,\\2x+1\leqslant0.\end{cases}$$

解一元一次不等式组得 $\begin{cases}x\leqslant1,\\x\geqslant-\dfrac{1}{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x\geqslant1,\\x\leqslant-\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

所以不等式组的解为 $-\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant1$.

3. 解不等式 $9x^2-6x>-1$.

解： $9x^2-6x+1>0$，即 $(3x-1)^2>0$，

因为一个数的平方的值是非负数.

所以只要 $3x-1\neq0$ 即可，

即 $x\neq\dfrac{1}{3}$，

所以不等式的解为 $x\neq\dfrac{1}{3}$.

练一练

解下列一元二次不等式：

(1) $3x-x^2-2\geqslant0$；　　(2) $9x^2-6x+1>0$；

(3) $4x-x^2<-5$；　　(4) $2x^2-3x<2$.

综合练习

一、填空题

1. 已知 $4x^{2n}-5+5=0$ 是关于 x 的一元一次方程，则 $n=$________.

2. 若 $x=-1$ 是方程 $2x-3a=7$ 的解，则 $a=$________.

3. 已知 x 与 x 的 3 倍的和比 x 的 2 倍少 6，列出方程为____________.

4. 某地开展植树造林活动，两年内植树面积由 $3\times10^5\ \mathrm{m}^2$ 增加到 $4.2\times10^5\ \mathrm{m}^2$，若设植树面积年平均增长率为 x，根据题意列方程______________.

5. 关于 x 的方程 $(m-4)x^2+(m+4)x+2m+3=0$，当 $m=$______时，该方程是一元二次方程，当 $m=$________时，该方程是一元一次方程.

6. 用符号"＞"或"＜"填空：

(1)$\sqrt{2}$________ 1.414；　(2)$2+\sqrt[3]{7}$________ 4；　(3)设 $a>b$，$-5a$ ________ $-5b$；

(4)设 $a<b$，则 $a+3$ ________ $b+3$，$1-a$ ________ $1-b$，$a-1$ ________ $b+1$.

7. 某品牌方便面包装袋上标有"面饼净含量 85 g±5 g"，则该食品的合格净含量范围是____________.

8. 方程 $(x-1)(2x+1)=2$ 化成一般形式是________，它的二次项系数是________.

9. 若方程 $kx^2-9x+8=0$ 的一个根为 1，则 $k=$________，另一个根为________.

10. 若方程 $x^2-3x+m=0$ 有两个相等的实数根，则 $m=$________，相等的实数根为________.

11. 若方程 $x^2+px+q=0$ 的两个根是 -2 和 3，则 p，q 的值分别为________.

12. 已知 $a>b>c$，当 $c<0$ 时，$\frac{a}{c}$____$\frac{b}{c}$，$a+c$ ____ $b+c$.（填"＞"或"＜"）

二、选择题

1. 方程 $m+x=1$ 和 $3x-1=2x+1$ 有相同的解，则 m 的值为（　　）.

A. 0　　B. 1　　C. -2　　D. -1

2. 方程 $(a-1)x^2-ax+1=0$ 是一元二次方程，则 a 不等于（　　）.

A. 2　　B. 1　　C. ±1　　D. -1

3. 在梯形面积公式 $S=\frac{1}{2}(a+b)h$ 中，已知 $h=6$ cm，$a=3$ cm，$S=24\ \mathrm{cm}^2$，则 $b=$（　　）cm.

A. 1　　B. 5　　C. 3　　D. 4

4. 在平面直角坐标系中，若点 $P(m-3,\ m+1)$ 在第二象限，则 m 的取值范围为（　　）.

A. $-1<m<3$　　B. $m>3$　　C. $m<-1$　　D. $m>-1$

5. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-2x-m=0$ 有两个不相等的实数根，则实数 m 的

取值范围是(　　).

A. $m<0$　　B. $m<-2$　　C. $m\geqslant 0$　　D. $m>-1$

6. 实数 a 在数轴上对应的点如图 2-12 所示，则 a，$-a$，1 的大小关系正确的是(　　).

A. $-a<a<1$　　B. $a<-a<1$　　C. $1<-a<a$　　D. $a<1<-a$

图 2-12

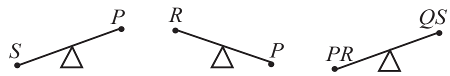


图 2-13

7. 四个小朋友玩跷跷板，他们的体重分别为 P，Q，R，S，如图 2-13 所示，则他们的体重大小关系是(　　).

A. $P>R>S>Q$　B. $Q>S>P>R$　C. $S>P>Q>R$　D. $S>P>R>Q$

8. 若 $2a+3b-1>3a+2b$，则 a，b 的大小关系为(　　).

A. $a<b$　　B. $a>b$　　C. $a=b$　　D. 不能确定

9. 不等式 $3x-5<3+x$ 的正整数解有(　　).

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

10. 在数轴上表示不等式组 $\begin{cases}x>0,\\2x-6\leqslant 0\end{cases}$ 的解集，如图 2-14 所示，正确的是(　　).

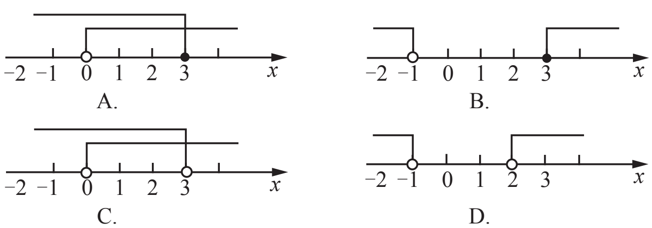


图 2-14

三、解答题

1. 一条环形跑道长 400 m，甲练习骑自行车，平均速度是 550 m/min；乙练习赛跑，平均速度是 250 m/min. 两人同时同地同向出发，经过多少时间，两人首次相遇？

2. 学生李明将 2 000 元人民币按一年定期存入银行，到期后支取 1 000 元用于生活费用支出，剩下的 1 000 元及应得利息又全部按一年定期存入银行，若存款的利率不变，且不考虑利息税，到期后本息共计 1 320 元. 若设年利率为 x，根据题意列方程并求解.

3. 某建材城销售一种成本为每件 40 元的装修材料，据市场分析，若按每件 50 元销售，一个月能售出 500 件；销售单价每涨 1 元，月销售量就减少 10 件，商店想在月销售成本不超过 1 万元的情况下，使得月销售利润达到 8 000 元，销售单价应定为多少？

4. 现有长 40 m，宽 30 m 的场地，欲在中央建一游泳池，周围是等宽的便道及休息

区，且游泳池与周围部分面积之比为 3∶2，请给出这块场地建设的设计方案，并用图形及相关尺寸表示出来.

5. 如图 2-15，一块长和宽分别为 250 cm 和 40 cm 的长方形纸片，要在它的四角截去四个相等的小正方形，折成一个无盖的长方体纸盒，使它的底面积为 450 cm^2. 那么纸盒的高是多少？

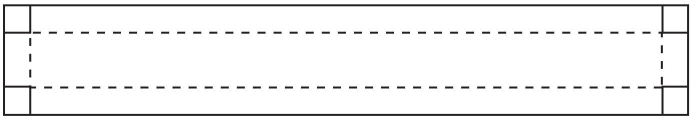


图 2-15

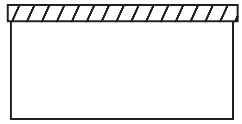


图 2-16

6. 如图 2-16，某农场要建一个长方形的养鸡场，鸡场的一边靠墙(墙长 18 m)，另三边用木栏围成，木栏长 35 m。(1)鸡场的面积能达到 150 m^2 吗？(2)鸡场的面积能达到 180 m^2 吗？如果能，请你给出设计方案；如果不能，请说明理由。(3)若墙长为 a m，另三边用竹篱笆围成，题中的墙长度 a m 对题目的解起着怎样的作用？

7. 某公司需在一个月(31 天)内完成新建办公楼的装修工程. 如果由甲、乙两个工程队合做，12 天可完成；如果由甲、乙两队单独做，甲队比乙队少用 10 天完成. (1)求甲、乙两工程队单独完成此项工程所需的天数. (2)如果请甲工程队施工，公司每日需付费用 2 000 元；如果请乙队施工，公司每日需付费用 1 400 元. 在规定时间内：A. 请甲队单独完成此项工程出；B. 请乙队单独完成此项工程；C. 请甲、乙两队合作完成此项工程. 以上三种方案哪一种花钱最少？

趣味数学

蜜蜂蜂房中的建筑数学

蜜蜂是勤劳的，它们酿造出了最甜的蜜；蜜蜂是聪明的，它们会分工合作，还会用舞蹈的形式告诉同伴：哪里有花源，数量怎么样. 实际上，不仅如此，蜜蜂还是出色的建筑师. 它们建筑的蜂房就是自然界诸多奇迹中的一个(图 2-17).

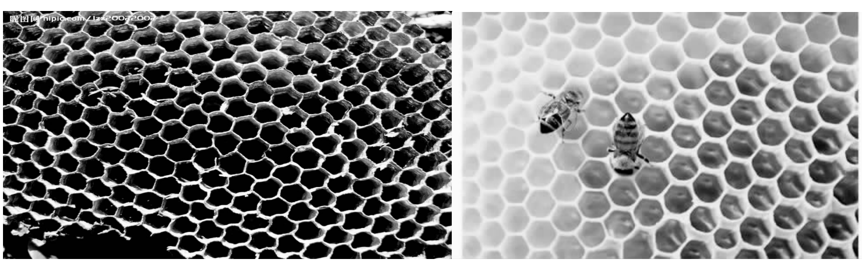


图 2-17

蜂房是正六棱柱的形状(图 2-18)，它的底是由三个全等的菱形组成的. 蜂巢内外面

的巢穴刚好一半相互错开，相互组合六角形的边交叉的点是内侧六角形的中心．两面的巢房方向都是朝上的．蜂巢是严格的六角柱形体．它的一端是六角形开口，另一端则是封闭的六角棱锥体的底．达尔文称赞蜜蜂的建筑艺术，说它是天才的工程师．

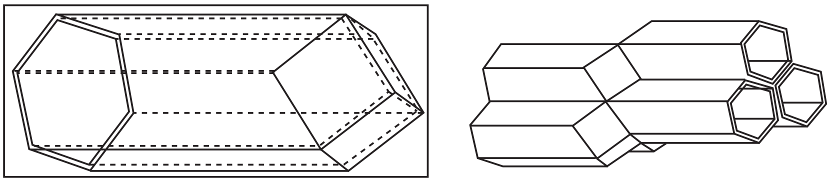


图 2-18

法国的学者马拉尔狄曾经观察过蜂房的结构，在 1712 年，他测量后发现，每个蜂房的体积几乎都是 0.25 cm^3。底部菱形的锐角是 $70°32'$，钝角是 $109°28'$，蜜蜂的工作竟然是这样的精细．巢室的形状就像是两个相对的蜂巢层互相套叠方，而末端的各个平面都是和对边的巢室共用的．相邻的房孔共用一堵墙和一个孔底，非常节省建筑材料；房孔是正六边形，蜜蜂的身体基本上是圆柱形，蜂在房孔内既不会有多余的空间又不感到拥挤．数学家巴普士告诉我们：正六棱柱的蜂房是一种最经济的形状，在其他条件相同的情况下，这种结构的容积最大，所用的材料最少．同时，他还给出了严格的证明．看来，我们不得不为蜜蜂的高超的建筑艺术所折服了．马克思也高度地评价它：蜜蜂建筑蜂房的本领使人间的许多建筑师感到惭愧．现在，许多建筑师开始模仿蜂房的结构，并把它们应用到建筑的实践中去．

模块3 函数

3.1 平面直角坐标系

3.1.1 确定物体位置的方法

想一想

如图3-1所示，是某城市旅游景点的示意图. 你如何确定各个景点的位置？

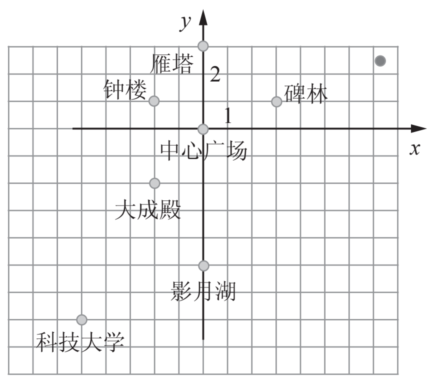


图3-1 如何确定平面上点的位置

有一位聪明的同学提出了一个方案，如图3-1，以中心广场为原点，画两条互相垂直的数轴，水平向右的数轴记作 x 轴，铅直向上的数轴记为 y 轴，这样每个景点就可以用一个有序实数对来表示，如碑林的位置可以用有序数对(3，1)来表示，有序数对(−2，1)表示钟楼. 其实，这是用坐标表述物体位置的一种方法.

小明去某地考察环境污染问题，并且他事先知道下面的信息："奔奔日用化工品厂"在他现在所在地的北偏东30°的方向，距离此处3 km的地方；"明天调味品厂"在他现在所在地的北偏西45°的方向，距离此处2.4 km的地方；"321号水库"在他现在所在地的南偏东27°的方向，距离此处1.1 km的地方. 根据这些信息你能画出表示各处位置的简图吗？你能说出小明相对于"明天调味品厂"的位置吗？

由题意可知，小明在“明天调味品厂”的南偏东 45°，距离调味品厂 2.4 km 的地方，如图 3-2 所示．其实，这是用方位角和距离来表述物体位置的一种方法.

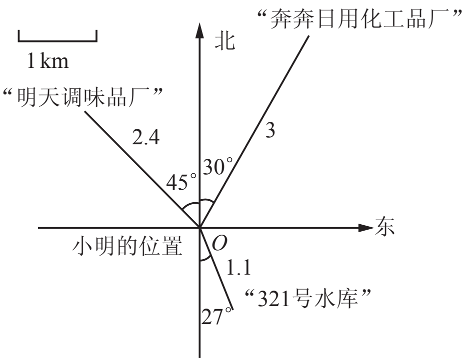


图 3-2

练一练

1. 试着在图 3-3 中按这种方法做出有序数对(1，3)、(－1，2)、(－1，－0.5)所表示的点.

2. 画一幅示意图，标出学校生活区门房和食堂、一号楼、三号楼、教学区门房的位置.

3. 如图 3-4 所示，观察图形回答下列问题：

(1)相对于小明家 A 的位置，说出书店 B 的位置；

(2)某地点在小明家的南偏东 58°的方向，且到小明家的实际距离约为 250 m，请写出这一地点的名称.

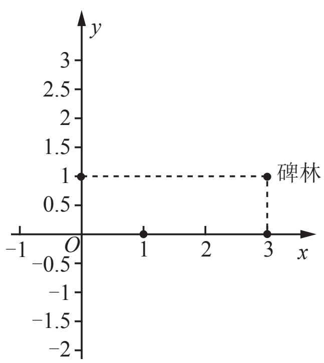


图 3-3

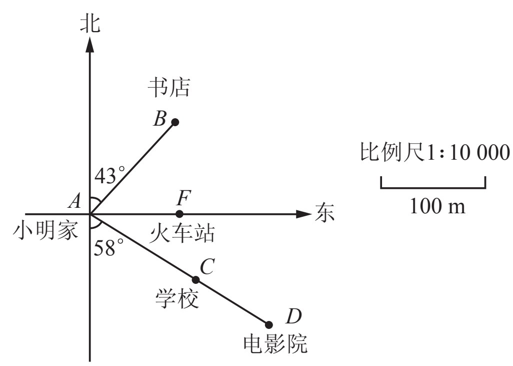


图 3-4

3.1.2 平面直角坐标系

记一记

在数学上，我们常用如下的方法来表示平面内点的位置，在平面内画两条互相垂直，

并且有公共原点 O 的数轴，其中一条叫作 x 轴(又叫横轴)，通常画成水平，另一条叫作 y 轴(又叫纵轴)，画成与 x 轴垂直，这样，我们就在平面内建立了平面直角坐标系，简称直角坐标系.

坐标系所在平面就叫作坐标平面，两坐标轴的公共原点叫作直角坐标系的原点.

对于平面内任意一点 M，作 $MM_1\perp x$ 轴，$MM_2\perp y$ 轴，若垂足 M_1，M_2 在各自数轴上所对应的实数分别为 x_0，y_0，则 x_0 叫作点 M 的横坐标，y_0 叫作点 M 的纵坐标，有序数对 (x_0, y_0) 叫作点 M 的坐标.

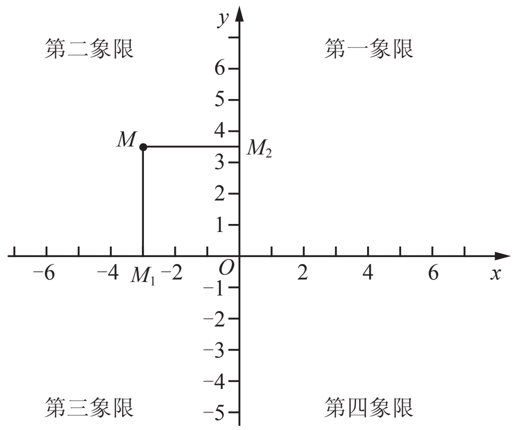


图 3-5

两条坐标轴将坐标平面分成的 4 个区域称为象限，如图 3-5 所示，按逆时针顺序分别记作第一、二、三、四象限.(注：坐标轴上的点不在任一象限内)

在建立直角坐标系表示给定的点或图形的位置时，应选择适当的点作为原点，适当的直线作为坐标轴，适当的距离为单位长度，这样往往有助于表示和解决有关问题.

议一议

1. 若坐标平面内有一点 P，我们应该如何确定它的坐标呢?
2. 若已知点 Q 的坐标为 (m, n)，如何确定点 Q 的位置呢?
3. 各个象限内的点的坐标有何特点? 坐标轴上的点的坐标呢?
4. 与坐标轴平行的直线上的点的坐标有什么特点呢?
5. 关于坐标轴对称的点的坐标有什么关系呢?
6. 坐标轴夹角平分线上的点的坐标有什么特点呢?

3.1.3 特殊位置的点的坐标的特点

记一记

1. x 轴上的点，纵坐标为 0；y 轴上的点，横坐标为 0.

各象限的点的坐标的符号：若点 $P(x, y)$ 在第一象限，则 $x>0$，$y>0$；若点 $P(x, y)$ 在第二象限，则 $x<0$，$y>0$；若点 $P(x, y)$ 在第三象限，则 $x<0$，$y<0$；若点 $P(x, y)$ 在第四象限，则 $x>0$，$y<0$.(如图 3-6 所示)

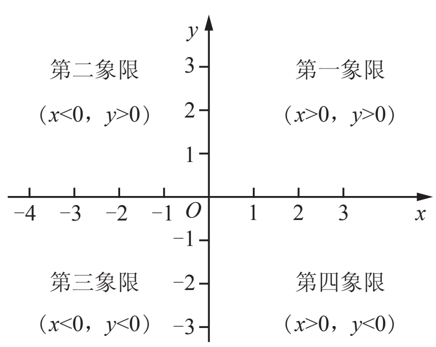


图 3-6

2. 平行直线上的点的坐标特征：

(1)在与 x 轴平行的直线上，所有点的纵坐标相等. 如图 3-7 所示，A，B 两点在与 x 轴平行的直线上，则点 A，B 的纵坐标都等于 m；

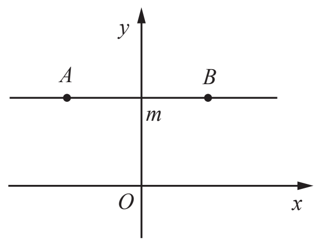


图 3-7

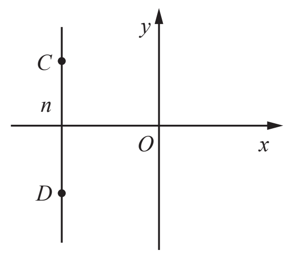


图 3-8

(2)在与 y 轴平行的直线上，所有点的横坐标相等. 如图 3-8 所示，C，D 两点在与 y 轴平行的直线上，则点 C，D 的横坐标都等于 n.

3. 对称点的坐标特征：

(1)点 $P(m，n)$关于 x 轴的对称点为 $P_1(m，-n)$，即横坐标不变，纵坐标互为相反数；(图 3-9)

(2)点 $P(m，n)$关于 y 轴的对称点为 $P_2(-m，n)$，即纵坐标不变，横坐标互为相反数；(图 3-10)

(3)点 $P(m，n)$关于原点的对称点为 $P_3(-m，-n)$，即横、纵坐标都互为相反数.(图 3-11)

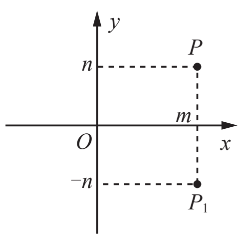


图 3-9

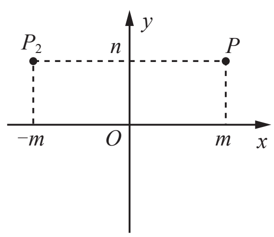


图 3-10

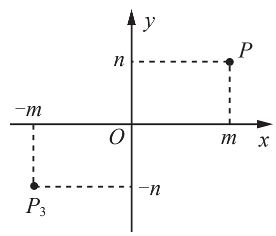


图 3-11

4. 两条坐标轴夹角平分线上的点的坐标的特征：

(1)若点 $P(m，n)$在第一、三象限的角平分线上，则 $m=n$，即横、纵坐标相等；(图 3-12)

(2)若点 $P(m，n)$在第二、四象限的角平分线上，则 $m=-n$，即横、纵坐标互为相反数；(图 3-13)

(3)平面直角坐标系中有一点 $P(a，b)$，点 P 到 x 轴的距离是这个点的纵坐标的绝对值，点 P 到 y 轴的距离是这个点的横坐标的绝对值.

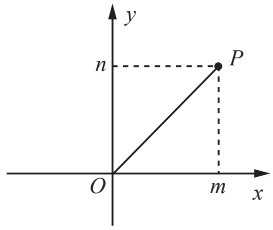


图 3-12

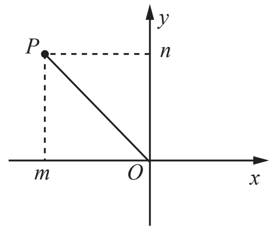


图 3-13

做一做

1. 已知点 $P(2a-3,3)$ 和点 $A(-1,3b+2)$ 关于 x 轴对称，那么 $a+b$ 的值是多少？

解： 关于 x 轴对称的点横坐标不变，纵坐标互为相反数，

所以 $2a-3=-1$，$3b+2=-3$，即 $a=1$，$b=-\frac{5}{3}$，

则 $a+b=-\frac{2}{3}$.

2. 已知点 $P(a-1,a^2-9)$ 在 x 轴的负半轴上，则点 P 坐标为多少？

解： 因为 x 轴的负半轴上的点纵坐标为 0，横坐标小于 0，所以 $a-1<0$，$a^2-9=0$.

则 $a=-3$，所以 P 点坐标为 $(-4,0)$.

3. 已知点 $A(-4,a)$ 在第三象限的角平分线上，则 a 的值为多少？

解： 第三象限的角平分线上的点横坐标与纵坐标都小于 0 且相等，

所以 $a=-4$.

4. 如图 3-14，在平面直角坐标系中，

(1)写出 A，B，C 各点坐标；

(2)A，B 两点的纵坐标有什么关系？

(3)你会求图中 $\triangle ABC$ 的面积吗？

解： (1)$A(-2,-2)$，$B(3,-2)$，$C(0,2)$；

(2)相等；

(3)面积为：$\frac{5\times 4}{2}=10$.

5. 已知 $A(-2,0)$，$B(4,0)$，$C(x,y)$.

(1)若点 C 在第二象限，且 $|x|=4$，$|y|=4$，求点 C 的坐标；

(2)求 $\triangle ABC$ 的面积.

解： (1)如图 3-15 所示，$\because$ 点 C 在第二象限，$\therefore x<0$，$y>0$，$\therefore x=-4$，$y=4$，$\therefore C(-4,4)$.

(2)$\triangle ABC$ 的面积 $=\frac{1}{2}AB\cdot|y|=12$.

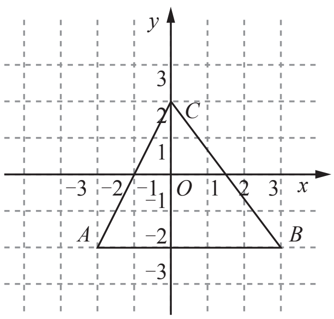


图 3-14

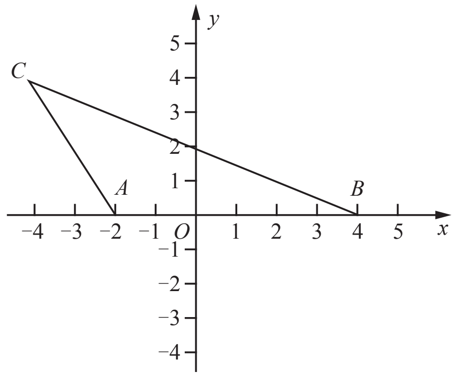


图 3-15

✎ **练一练**

1. 判断对错：

(1)坐标平面内的任一点，都有唯一的一对有序实数与它对应.（　　）

(2)直角坐标系内，原点的坐标是 0.（　　）

(3)$A(a，-b)$在第二象限，则点 $B(-a，b)$在第四象限.（　　）

(4)原点 O 不在任何象限内，原点 O 既在 x 轴上也在 y 轴上.（　　）

2. 如图 3-16，分别在坐标平面内确定点 $A(3，2)$，$B(2，3)$的位置，并确定点 C，D，E，F，G 的坐标.

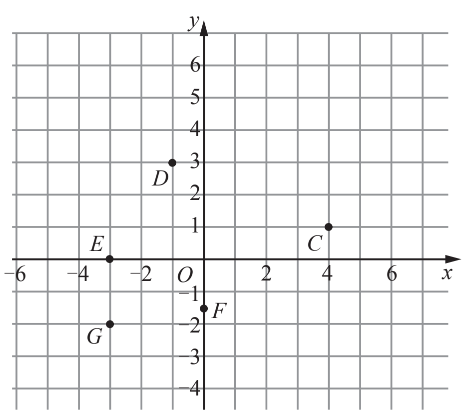


图 3-16

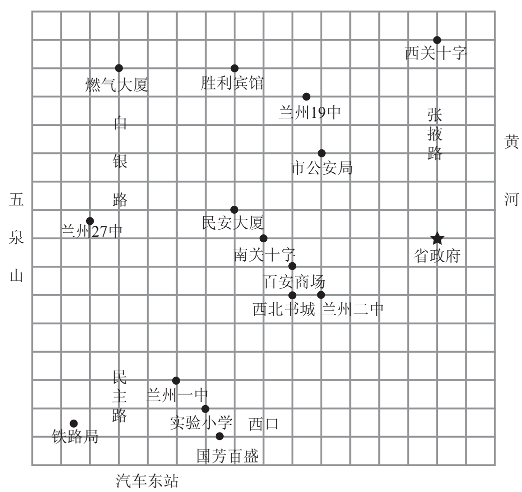


图 3-17

3. 如图 3-17 是兰州市部分街区图，试建立直角坐标系，用坐标表示各地的位置.

4. 在平面直角坐标系中，点 $A(2，5)$与点 B 关于 y 轴对称，则点 B 的坐标是(　　).

A.（-5，-2）　　B.（-2，-5）　　C.（-2，5）　　D.（2，-5）

5. 点 $P(a, 3)$，$Q(-2, b)$关于 x 轴对称，则 $a=$________，$b=$________.

6. 点 $A(3, a)$在 x 轴上，点 $B(b, 4)$在 y 轴上，则 $a=$________，$b=$________.

7. 若点 M 的坐标是(a, b)，且 $a>0$，$b<0$，则点 M 在(　　).

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

3.2 平面内两点间的距离公式和中点公式

当你在某个地方(A 地)，你的朋友在另外一个地方(B 地)，建立适当的坐标系，你俩就是该平面直角坐标系内的两点，这样你俩之间的距离就可以通过一定的数量关系来反映.

平面内两点 A，B 之间的距离通常用 $|AB|$ 来表示.

3.2.1 坐标平面内两点之间的距离

想一想

在平面直角坐标内，横轴上的两点 $A(4，0)$，$B(-1，0)$之间的距离 $|AB|=$________.

在平面直角坐标内，横轴上的两点 $A(x_1，0)$，$B(x_2，0)$之间的距离 $|AB|=$________.

在平面直角坐标内，纵轴上的两点 $A(0，5)$，$B(0，-3)$之间的距离 $|AB|=$________.

在平面直角坐标内，纵轴上的两点 $A(0，y_1)$，$B(0，y_2)$之间的距离 $|AB|=$________.

在平面直角坐标内，若已知点 $A(x_1，y_0)$，$B(x_2，y_0)$，则线段 AB ________ x 轴，$|AB|=$________.

在平面直角坐标内，若已知点 $A(x_0，y_1)$，$B(x_0，y_2)$，则线段 AB ________ y 轴，$|AB|=$________.

议一议

在图 3-18 中，过点 $P(x_1，y_1)$、点 $Q(x_2，y_2)$分别作过 x 轴、y 轴的垂线，两条垂线相交于点 M，点 M 的坐标是多少？在 Rt△PMQ 中，$|PM|=$________，$|QM|=$________，由此可得 $|PQ|=$________.

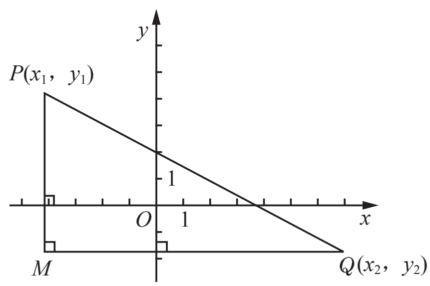


图 3-18

记一记

在平面直角坐标系内，如果已知两点 $P(x_1，y_1)$，$Q(x_2，y_2)$，那么

$$|PQ|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

做一做

已知：点 $A(1，2)$，$B(3，4)$，$C(5，0)$.

求证：△ABC 是等腰三角形.

证明：因为 $|AB|=\sqrt{(3-1)^2+(4-2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$；

$|AC|=\sqrt{(5-1)^2+(0-2)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$；$|CB|=\sqrt{(3-5)^2+(4-0)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$.

即 $|AC|=|BC|$ 且三点不共线，所以，△ABC 为等腰三角形.

3.2.2 线段的中点公式

想一想

在图 3-19 中，过线段 PQ 的中点 E 分别作横轴和纵轴的平行线，交 PM 和 QM 分别于点 F 和点 G，则点 G、点 F、点 E 的坐标分别为多少？

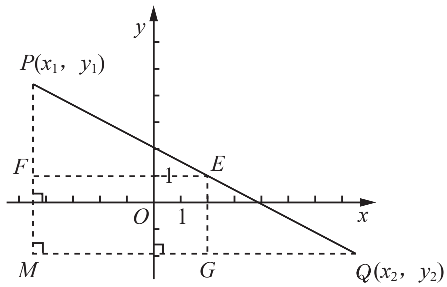


图 3-19

记一记

在平面直角坐标系内，如果已知两点 $P(x_1, y_1)$，$Q(x_2, y_2)$，那么线段 PQ 的中点 E 的坐标为

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right).$$

做一做

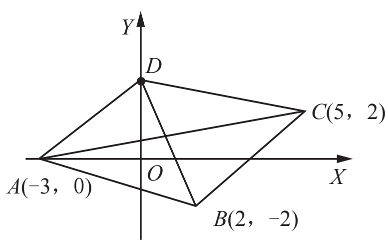


图 3-20

已知：如图 3-20 所示，平行四边形 $ABCD$ 的三个顶点坐标依次是 $A(-3, 0)$，$B(2, -2)$，$C(5, 2)$.

求：顶点 D 的坐标.

解：因为平行四边形的两条对角线中点相同，所以它们的中点的坐标也相同.

设 D 点的坐标为 (x, y)，则 $\begin{cases}\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{-3+5}{2}, \\ \dfrac{y-2}{2}=\dfrac{0+2}{2}.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=0, \\ y=4,\end{cases}$

所以点 D 的坐标为 $D(0, 4)$.

练一练

1. 已知点 $S(0, 2)$，$T(-6, -1)$，现将线段 ST 四等分，试求出各分点的坐标和 $|ST|$.

2. 已知△ABC 的三个顶点 $A(1, 0)$，$B(-2, 1)$，$C(0, 3)$，试求 BC 边上的中线 AD 的长度.

3.3 函数及其表示方法

3.3.1 函数的概念

想一想

有一种建筑用空心砖的规格为 39 cm×19 cm×19 cm，一块这样的空心砖的价格是 2.00 元，工地购买这样的空心砖 x 块需要材料费 y 元，你能把 y 用 x 的式子表示出来吗？如果 x 的值分别为 1，2，3，4，5，6，…，10 000，y 的值分别又是多少呢？

显然，$y=2x$.（x 为非负正整数）

记一记

设在一个变化过程中有两个变量 x 和 y，如果对于变量 x 的每一个值，变量 y 都有唯一确定的值和它对应，我们把 y 叫作 x 的函数，x 叫作自变量. 记作：$y=f(x)$.

3.3.2 函数的三种表示方法

想一想

$y=2x$，（x 为非负正整数）是函数吗？$y=-\frac{1}{2}x$ 呢？

记一记

1. 函数表达式法

如 $y=2x$，（x 为非负正整数），$y=-\frac{1}{2}x$ 称为函数的表达式(解析式).

2. 列表法

以函数 $y=2x$，（x 为非负正整数）为例，也可以用表 3-1 来表示变量 y 与 x 之间的关系.

表 3-1

x	1	2	3	4	5	6	…	10 000	…
y	2	4	6	8	10	12	…	20 000	…

3. 图象法

把表 3-1 中每一对对应的 x 与 y 的值，写成坐标(x，y)的形式，再把这些坐标所对应的点在平面直角坐标系内描出来，就可以得到函数的图象.

函数 $y=2x$，（x 为非负正整数）图象如图 3-21 所示 .

画函数图象的基本步骤是取点(列表)、描点、连点.

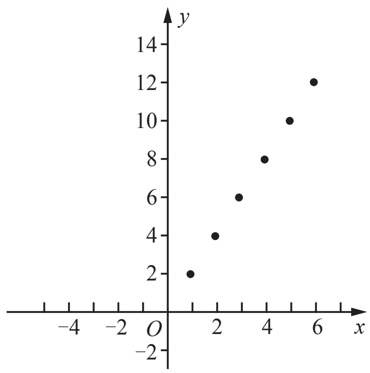


图 3-21

议一议

函数 $y=2x$，（x 为非负正整数）的图象上的点有多少个？要不要把所描各点按照自变量由小到大顺序连接起来？

练一练

1. 画出函数 $y=-\frac{1}{2}x$ 的图象.

2. 画出函数 $y=3x$ 的图象.

3. 观察第 1、2 题你画出的两个函数的图象，它们有什么特点？

3.4 一次函数

3.4.1 一次函数的概念

议一议

你所在的道桥建筑公司要进行一段学校内部道路建设项目的投标活动，公司决定由你做工程预算，已知此项目预算分为固定成本和可变成本两部分，其中固定成本为 2 万元，可变成本由道路的长度决定，每米道路 0.2 万元，你能将总预算金额 y(万元)表示为道路长度 x(米)的函数吗？

易得：$y=0.2x+2.(x>0)$

记一记

一般地，形如 $y=kx+b(k$，b 为常数且 $k\neq0)$的函数叫作一次函数．当 $b=0$ 时，$y=kx$ 叫作正比例函数．上面问题产生的函数 $y=0.2x+2$ 就是一个一次函数．$y=2x$ 就是一个正比例函数.

想一想

下列函数中一次函数有哪几个？正比例函数有哪几个？

①$y=x+1$；　②$y=3x$；　③$y=\frac{3}{5}x$；　④$y=\frac{x}{2}+1$；

⑤$y=\frac{2}{x}$；　⑥$y=x+\frac{1}{2}$；　⑦$y=x^2+1$；　⑧$C=2\pi r$(π 为圆周率).

练一练

1. 普通 425＃散装水泥的单价为 325 元/t，现公司需要购入 x t，那么所需金额 y(元)与数量 x(t)之间的关系是什么？它是不是正比例函数？

2. 设路程为 s(km)，时间为 t(h)，速度为 v，当 $v=60$(km/h)时，路程和时间的关系式为________，这个关系式中，________是常量，________和________是变量，s 随着 t 的增大而________.

3. 用两点确定一条直线的方法在同一平面直角坐标系内画出函数 $y=3x$ 和 $y=-\frac{3}{2}x$ 的图象，并指出 y 随着 x 的增大而增大，还是 y 随着 x 的增大而减小？

4. 已知 $y-1$ 与 x 成正比例，且 $x=-2$ 时，$y=4$，求 y 与 x 之间的函数关系式为________.

3.4.2 一次函数的图象

记一记

一般地，一次函数 $y=kx+b(k$，b 为常数且 $k\neq0)$的图象是直线.

通过前面的练习题，我们知道正比例函数 $y=kx$(k 为常数且 $k\neq 0$)的图象是经过原点的直线．当 $k>0$ 时，正比例函数 $y=kx$ 的图象位于第一、三象限，且 y 随着 x 的增大而增大．当 $k<0$ 时，正比例函数 $y=kx$ 的图象位于第二、四象限，且 y 随着 x 的增大而减小．(图 3-22 和图 3-23)

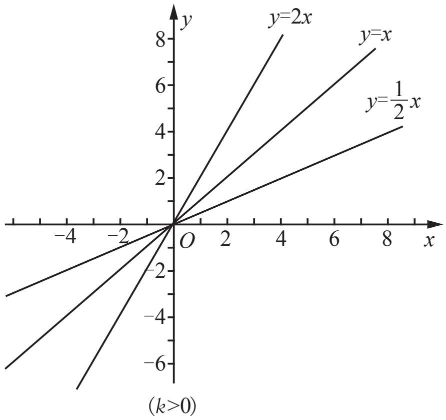


图 3-22

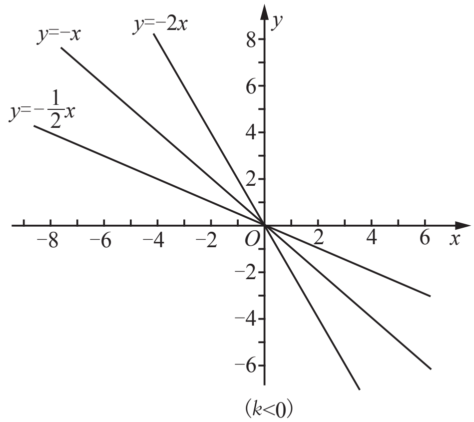


图 3-23

想一想

我们知道两点确定一条直线，有没有更简单地画出一次函数 $y=kx+b$(k，b 为常数且 $k\neq 0$)图象的方法？

练一练

请在同一平面直角坐标系内(图 3-24)画出一次函数 $y=2x$，$y=2x+1$，$y=2x-1$ 的图象．

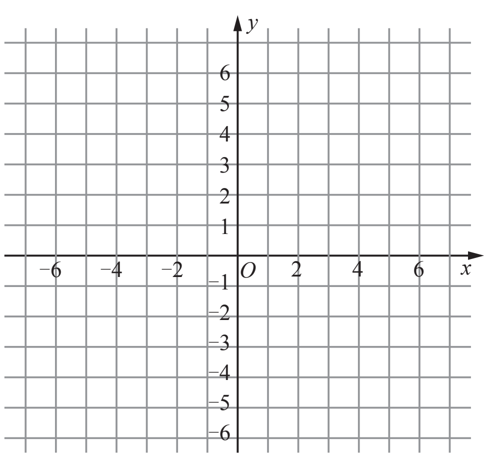


图 3-24

议一议

观察一次函数 $y=2x$，$y=2x+1$，$y=2x-1$ 的图象，它们的位置有什么关系呢？

3.4.3　一次函数的性质

记一记

一般地，一次函数 $y=kx+b$（k，b 为常数且 $k\neq0$）的图象是由相应的正比例函数 $y=kx$（k 为常数且 $k\neq0$）的图象向上（$b>0$ 时）或向下（$b<0$ 时）平行移动 $|b|$ 个单位长度得到的.

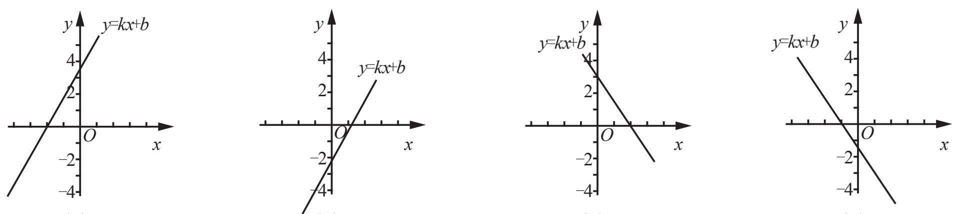
一次函数 $y=kx+b$（k，b 为常数且 $k\neq0$）的图象与 y 轴的交点是 $(0，b)$.

b 叫作一次函数 $y=kx+b$（k，b 为常数且 $k\neq0$）的图象在 y 轴上的截距.

对于一次函数 $y=kx+b$（k，b 为常数且 $k\neq0$），当 $k>0$ 时，y 随着 x 的增大而增大；当 $k<0$ 时，y 随着 x 的增大而减小.

练一练

1. 图 3-25 是 4 个不同的一次函数 $y=kx+b$（k，b 为常数且 $k\neq0$）的图象，判断相应的常数 k，b 的符号.



(1) k___0　b___0

(2) k___0　b___0

(3) k___0　b___0

(4) k___0　b___0

图 3-25

2. 有下列函数：①$y=6x-5$，②$y=5x$，其中过原点的直线是________；y 随 x 的增大而增大的函数是________；图象过第一、三、四象限的函数是________.

3. 如果一次函数 $y=kx-3k+6$ 的图象经过原点，那么 k 的值为________.

4. 一次函数的图象经过两点 $A(2，1)$ 和 $B(-3，-2)$，求它的表达式.

5. 试着用列表、描点、连线的方法画出一次函数 $y=2x+1$ 的图象，观察一次函数 $y=2x+1$ 的图象有何特点？

表 3-2

x	-2	-1	0	1	2
$y=2x+1$					

6. 一个道桥公司中标修建一条高速公路，已经修了 2 km，以后每周能修筑 0.5 km，再经过 x 周后，已经修好的高速路有 y km，求 y 与 x 之间的函数关系式.

3.5 反比例函数

3.5.1 反比例函数的概念

当一个长方形面积为 100 m^2 时，长 y(m)与宽 x(m)成什么关系呢？你能把 y 用 x 的代数式表示出来吗？

显然：$y=\frac{100}{x}$.

记一记

一般地，形如 $y=\frac{k}{x}$(k 为常数且 $k\neq 0$)的函数叫作反比例函数．$y=\frac{100}{x}$就是一个由实际问题产生的反比例函数.

想一想

下列函数中，反比例函数有哪几个？

①$y=\frac{x}{2}+1$；　②$y=\frac{x}{3}$；　③$y=\frac{3}{x}$；　④$y=\frac{3}{2x}$；　⑤$y=-\frac{2}{x}$；　⑥$y=-\frac{3}{2x}$.

议一议

如何画出反比例函数 $y=\frac{2}{x}$和 $y=-\frac{2}{x}$的图象？

反比例函数 $y=\frac{k}{x}$(k 为常数且 $k\neq 0$)的自变量 x 的值可以取 0 吗？

练一练

试着在图 3-26 中用列表、描点、连线的方法画出反比例函数 $y=\frac{2}{x}$和 $y=-\frac{2}{x}$的图象．观察反比例函数的图象有何特点？

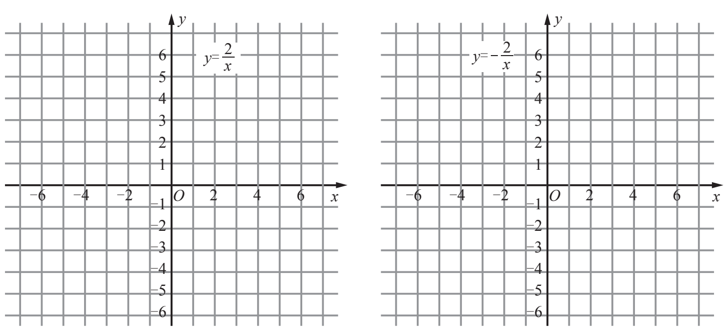


图 3-26

表 3-3

x	-2	-1	-0.5	0.5	1	2
$y=\frac{2}{x}$						
$y=-\frac{2}{x}$						

3.5.2 反比例函数的图象和性质

议一议

观察反比例函数 $y=\frac{2}{x}$ 和 $y=-\frac{2}{x}$ 的图象，讨论反比例函数的图象有何特点？

记一记

一般地，反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（k 为常数且 $k\neq0$）的图象是双曲线.（图 3-27）

当 $k>0$ 时，反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（k 为常数且 $k\neq0$）的图象在第一、三象限，在每个象限内，y 随着 x 的增大而减小；

当 $k<0$ 时，反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（k 为常数且 $k\neq0$）的图象在第二、四象限，在每个象限内，y 随着 x 的增大而增大.

图象的两个分支无限接近 x 轴和 y 轴，但永远不会与 x 轴和 y 轴相交.

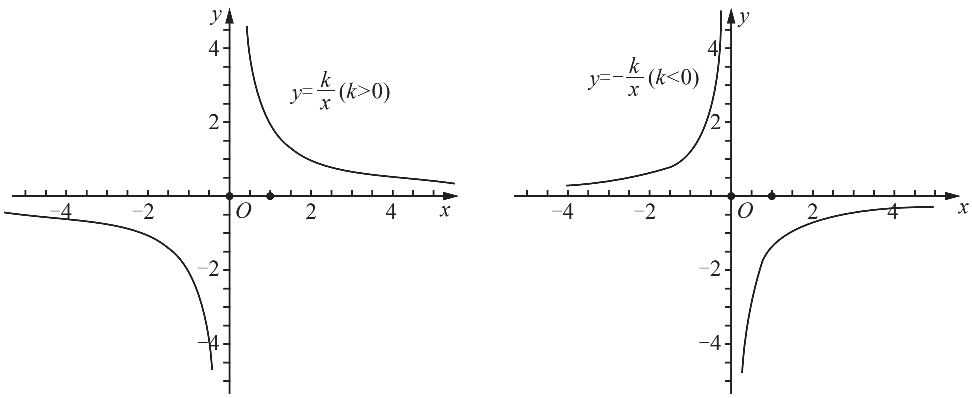


图 3-27

练一练

1. 写出下列问题中两个变量之间的函数关系式，并判断其是否为反比例函数. 如果是，指出比例系数 k 的值.

(1)底边为 5 cm 的三角形的面积 y(cm^2)随底边上的高 x(cm)的变化而变化；

(2)某村有耕地面积 200 km^2，人均占有耕地面积 y(km^2)随人口数量 x(人)的变化而变化；

(3)一个物体的重力为 120 N，物体对地面的压强 p(Pa)随该物体与地面的接触面积 S(m^2)的变化而变化.

2. 已知函数 $y=\dfrac{m+1}{x}$是反比例函数，求 m 的取值范围？

3. 已知反比例函数的图象经过点$\left(\dfrac{1}{3}，-1\right)$，求这个反比例函数的表达式.

3.6　二次函数

3.6.1　二次函数的概念

议一议

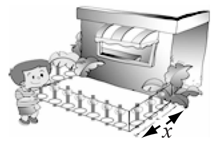


图 3-28

1. 用 20 m 的篱笆围一个矩形的花圃(图 3-28)，设连墙的一边为 x，矩形的面积为 y，求：(1)写出 y 关于 x 的函数关系式. (2)当 $x=3$ 时，矩形的面积为多少？

解：(1) $y=x(20-2x)=-2x^2+20x$；

(2)当 $x=3$ 时，$y=-2\times3^2+20\times3=42\ \text{m}^2$. 矩形的面积为 42 m^2.

2. 某工厂一种产品现在的年产量是 30 件，计划今后两年增加产量. 如果每年都比上一年的产量增加 x 倍，那么两年后这种产品的产量 y 将随计划所定的 x 的值而确定，y 与 x 之间的关系应怎样表示？

解：这种产品的原产量是 30 件，一年后的产量是 $30(1+x)$件，再经过一年后的产量是$30(1+x)^2$ 件，即两年后的产量为 $y=30(1+x)^2$，即 $y=30x^2+60x+30$.

记一记

形如 $y=ax^2+bx+c$(a，b，c 为常数且 $a\neq0$)的函数叫作二次函数. 表达式中只有一个自变量 x，且 x 的最高次数为 2. 比如上例产生的函数 $y=-2x^2+20x$，$y=30x^2+60x+30$ 就是二次函数.

想一想

下列函数中，哪些是二次函数？若是，分别指出二次项系数，一次项系数，常数项.

①$y=x^2$；　②$y=\dfrac{x^2}{3}$；　③$y=\dfrac{3}{x^2}$；　④$y=x^2+1$；

⑤$y=3(x-1)^2+1$；⑥$y=3-2t^2$.

做一做

画出二次函数 $y=x^2$ 和 $y=-x^2$ 的图象并观察它们分别有何特点？

表 3-4

x	…	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	2	3	…
$y=x^2$											
$y=-x^2$											

解：绘制 $y=x^2$ 和 $y=-x^2$ 的图象(图 3-29).

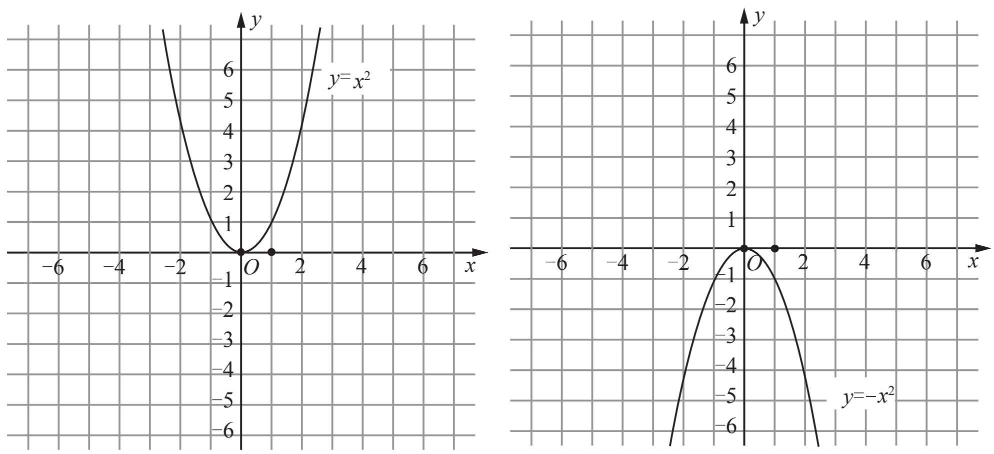


图 3-29

3.6.2 二次函数的图象

记一记

一般地，二次函数 $y=ax^2+bx+c$（a，b，c 为常数且 $a\neq0$）的图象是抛物线. 二次函数 $y=ax^2+bx+c$（a，b，c 为常数且 $a\neq0$）的图象就叫作抛物线 $y=ax^2+bx+c$.

当 $a>0$ 时，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的开口向上.

当 $a<0$ 时，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的开口向下.

做一做

在同一平面直角坐标系中（图 3-30）画出二次函数 $y=x^2-2x$ 和 $y=-x^2-2x$ 的图象.

表 3-5

x	…	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	…
$y=x^2-2x$											
$y=-x^2-2x$											

用列表、描点、连线的方法试一试！

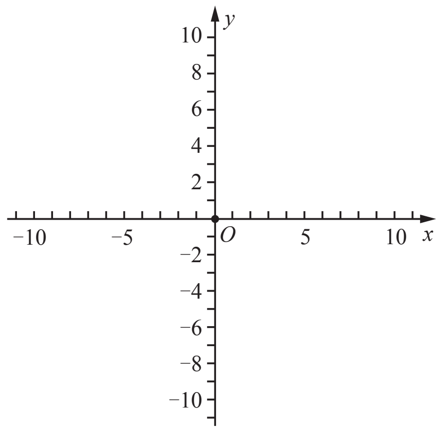


图 3-30

议一议

二次函数 $y=x^2-2x$ 和 $y=-x^2-2x$ 的图象分别有何特点？

3.6.3 二次函数图象的对称轴

记一记

抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 是轴对称图形，它的对称轴是直线 $x=-\frac{b}{2a}$.

练一练

1. 写出下列抛物线的开口方向和对称轴.

(1) $y=x^2+4x$；(2) $y=-2x^2+4x$；(3) $y=-2x^2+6x+3$；(4) $y=3x^2+6x+1$.

2. 在图 3-31 中，画出二次函数 $y=x^2-2x-3$ 的图象.

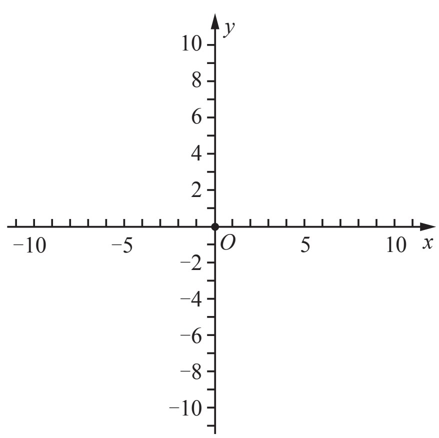


图 3-31

表 3-6

x	…	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	…
$y=x^2-2x-3$											

议一议

抛物线 $y=ax^2+bx+c$（a，b，c 为常数且 $a\neq0$）与 y 轴的交点坐标是什么？抛物线 $y=ax^2+bx+c$（a，b，c 为常数且 $a\neq0$）与它的对称轴的交点坐标是什么？

3.6.4　二次函数图象的性质

记一记

抛物线 $y=ax^2+bx+c$（a，b，c 为常数且 $a\neq0$）与 y 轴的交点是 $(0,\ c)$，c 叫作抛物线 $y=ax^2+bx+c$（a，b，c 为常数且 $a\neq0$）在 y 轴上的截距.

如图 3-32，抛物线 $y=ax^2+bx+c$（a，b，c 为常数且 $a\neq0$）与它的对称轴的交点叫作该抛物线的顶点.

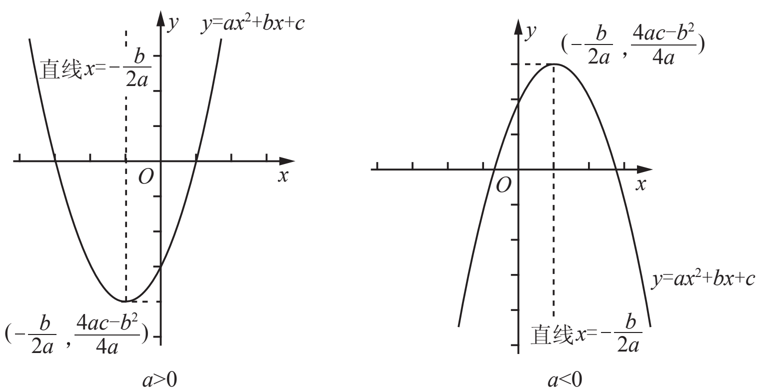


图 3-32

抛物线 $y=ax^2+bx+c$（a，b，c 为常数且 $a\neq0$）的顶点坐标是 $\left(-\dfrac{b}{2a},\ \dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$.

当 $a>0$ 时，顶点为最低点，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 在 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时取得最小值，最小值为 $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$；

当 $a<0$ 时，顶点为最高点，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 在 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时取得最大值，最大值为 $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$.

当 $a>0$ 时，在对称轴的左侧，y 随 x 的增大而减小；在对称轴的右侧，y 随 x 的增大而增大.

当 $a<0$ 时，在对称轴的左侧，y 随 x 的增大而增大；在对称轴的右侧，y 随 x 的增

大而减小.

做一做

1. 写出下列抛物线的顶点坐标和与 y 轴的交点，并画出各个抛物线.

(1) $y=x^2+4x$；　　　(2) $y=-2x^2+4x$；

(3) $y=-2x^2+6x+3$；　(4) $y=3x^2+6x+1$.

解：(略).

2. 已知二次函数 $y=x^2-x-6$，问：

(1)怎样画这个二次函数的草图？

(2)根据二次函数的图象，能求出抛物线 $y=x^2-x-6$ 与 x 轴的交点吗？其交点将 x 轴分成几段？

(3)观察图象上纵坐标 $y=0$，$y>0$，$y<0$ 的那些点所对应的横坐标 x 的取值范围？

分析：采用列表法画 $y=x^2-x-6$ 的草图.（图 3-33）

表 3-7

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y=x^2-x-6$	6	0	-4	-6	-6	-4	0	6

解方程 $x^2-x-6=0$ 得 $x_1=-2$，$x_2=3$. 观察图象可以看到，方程 $x^2-x-6=0$ 的解，恰好分别为函数图象与 x 轴交点的横坐标；在 x 轴上方的函数图象所对应的自变量 x 的取值范围，即满足 $x<-2$ 或 $x>3$ 的值，使得 $y=x^2-x-6>0$；在 x 轴下方的函数图象所对应的自变量 x 的取值范围，即满足 $-2<x<3$ 的值，使得 $y=x^2-x-6<0$.

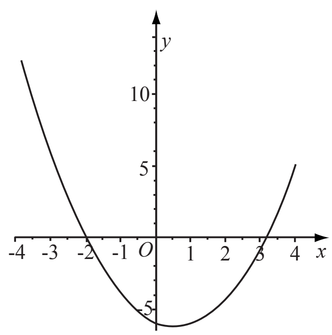


图 3-33

3.6.5　二次函数图象的应用——解一元二次不等式

想一想

二次函数的图象、一元二次方程与一元二次不等式之间存在着哪些联系？

由上面的问题可知，借助一元二次函数 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 的图象可以解不等式 $ax^2+bx+c>0$(或>0)或 $ax^2+bx+c<0$(或<0).

(1)当 $\Delta=b^2-4ac>0$ 时，方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不相等的实数解 x_1 和 x_2($x_1<x_2$)，一元二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴有两个交点$(x_1, 0)$，$(x_2, 0)$(图 3-34(1)). 此时，不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是$\{x<x_1$ 或 $x>x_2\}$，不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集是$\{x_1<x<x_2\}$.

(2)当 $\Delta=b^2-4ac=0$ 时，方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个相等的实数解 x_0，一元二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴只有一个交点$(x_0, 0)$(图 3-34(2)). 此时，不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集是空集；不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是不等于 x_0 的全体实数.

(3)当 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时，方程 $ax^2+bx+c=0$ 没有实数解，一元二次函数 $y=ax^2+$

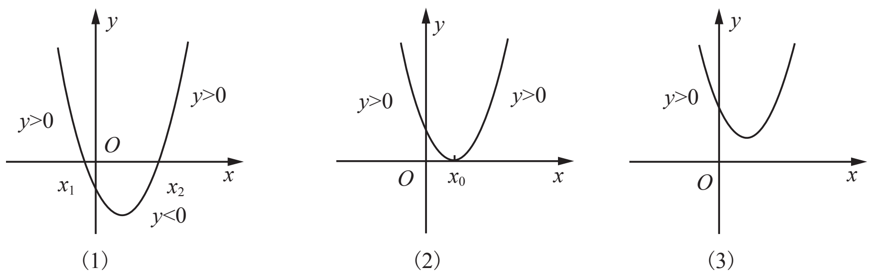


图 3-34

$bx+c$ 的图象与 x 轴没有交点(图 3-34(3)). 此时，不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集是空集；不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是全体实数.

当 $a>0$ 时，一元二次不等式的解集如表 3-8 所示.

表 3-8

方程或不等式	解集		
$a>0$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
$ax^2+bx+c=0$	$x=x_1$ 或 $x=x_2$	$x=x_0$	空集
$ax^2+bx+c>0$	$x<x_1$ 或 $x>x_2$	$x<x_0$ 或 $x>x_0$	全体实数
$ax^2+bx+c\geqslant0$	$x\leqslant x_1$ 或 $x\geqslant x_2$	全体实数	全体实数
$ax^2+bx+c<0$	$x_1<x<x_2$	空集	空集
$ax^2+bx+c\leqslant0$	$x_1\leqslant x\leqslant x_2$	$x=x_0$	空集

表 3-8 中 $\Delta=b^2-4ac$，$x_1<x_2$.

解一元二次不等式的一般步骤如下所述.

1. 将不等式转化为一元二次不等式的一般形式，即 $ax^2+bx+c>0(\geqslant0)$ 或 $ax^2+bx+c<0(\leqslant0)$ 且 $a>0$ 的形式；

2. 解方程 $ax^2+bx+c=0$；

3. 画出函数 $y=ax^2+bx+c$ 的大致图象；

4. 求出不等式的解集.

议一议

表 3-9

方程或不等式	解集		
$a<0$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
$ax^2+bx+c=0$	x_1，$x_2(x_1<x_2)$	$x_1=x_2$	无解
$ax^2+bx+c>0$			
$ax^2+bx+c\geqslant0$			
$ax^2+bx+c<0$			
$ax^2+bx+c\leqslant0$			

做一做

1. 解下列一元二次不等式.

(1)$-x^2+x<-2$；　　　　(2)$2x^2-5x<3$.

解：(1)整理$-x^2+x<-2$，得 $x^2-x-2>0$，

又∵方程 $x^2-x-2=0$ 的判别式 $\Delta=b^2-4ac=1-4\times1\times(-2)=9>0$，

∴方程 $x^2-x-2=0$ 有 2 个不相等的解.

解方程得 $x_1=-1$，$x_2=2$.

可得不等式的解为 $x<-1$ 或 $x>2$(图 3-35).

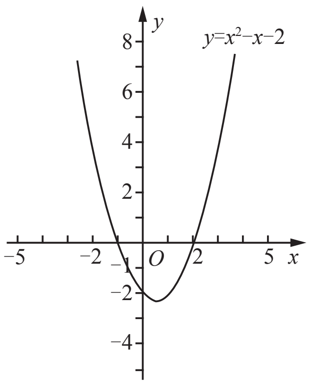


图 3-35

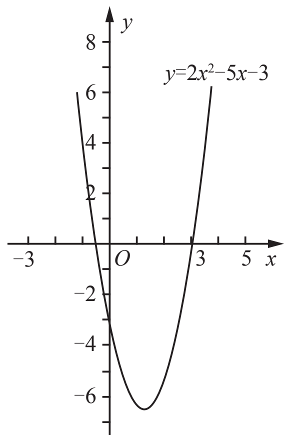


图 3-36

(2)整理得 $2x^2-5x-3<0$，

又∵方程 $2x^2-5x-3=0$ 的判别式 $\Delta=b^2-4ac=25+24=49>0$，

∴方程 $2x^2-5x-3=0$ 有 2 个不相等的解，

解方程得 $x_1=-\dfrac{1}{2}$，$x_2=3$，

可得不等式的解为$-\dfrac{1}{2}<x<3$(图 3-36).

2. x 取什么值时，$\sqrt{x^2-4x+9}$有意义.

解：根据题意可得 $x^2-4x+9\geqslant0$，即求此不等式的解集，

∵$\Delta=b^2-4ac=16-4\times1\times9=-20<0$，

∴方程 $x^2-4x+9=0$ 没有实数解，

可得不等式的解为全体实数.

3.6.6　二次函数性质的应用

议一议

利达经销店为某工厂代销一种建筑材料(这里的代销是指厂家先免费提供货物，待货

物售出后再进行结算，未售出的由厂家负责处理）. 当售价为 260 元/t 时，月销售量为 45 t。该经销店为提高经营利润，准备采取降价的方式进行促销. 经市场调查发现：当售价每下降 10 元/t，月销售量就会增加 7.5 t，综合考虑各种因素，每售出 1 t 建筑材料共需支付厂家及其他费用 100 元. 设每吨材料售价为 x 元，该经销店的月利润为 y 元.

(1)当售价是 240 元/t 时，计算此时的月销售量；

(2)求出 y 与 x 的函数关系式；

(3)该经销店要获得最大月利润，材料的售价应定为每吨多少元？

(4)小静说："当月利润最大时，月销售额也最大."你认为对吗？请说明理由.

分析： 设每吨货物销售单价降低了 x 个 10 元，即降价后的销售单价为 $260-10x$ 元.

为了解决此类问题，我们可以先完成表 3-10.

表 3-10

项目	销售单价/元	每吨成本/元	每吨利润/元	销量/t	月利润/元
降价前	260	100	160	45	160×45
降价后	$260-10x$	100	$(260-10x)-100$	$45+7.5x$	y

你能根据表格解决这个问题吗？

做一做

图 3-37 是一座悬索桥的效果图和设计简图，假如你是建造师，你能利用设计简图中给出的数据计算出直拉钢索 AB，CD，EF 的长度吗？

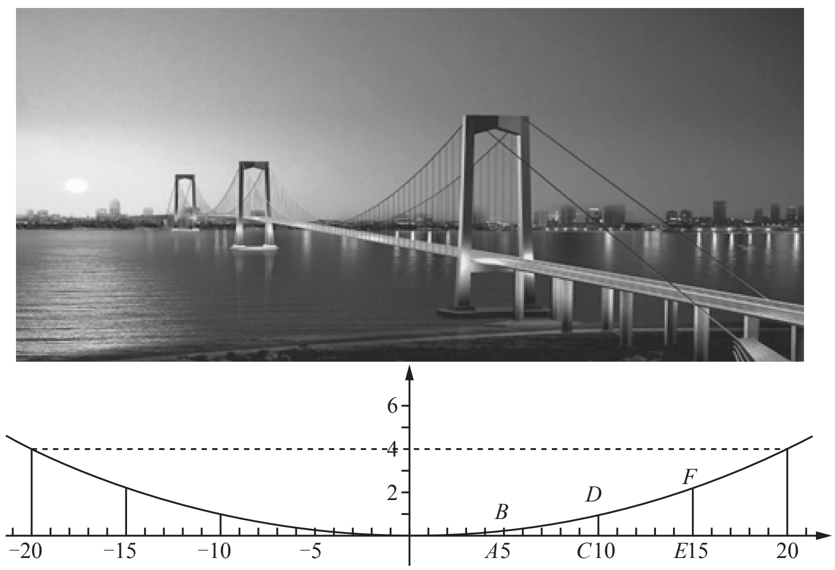


图 3-37

为了解决这个问题，我们可以建立如图 3-38 所示的平面直角坐标系，因为抛物线悬索的对称轴为 y 轴，顶点为坐标原点，所以设抛物线所对应的二次函数为 $y=ax^2(a>0)$.

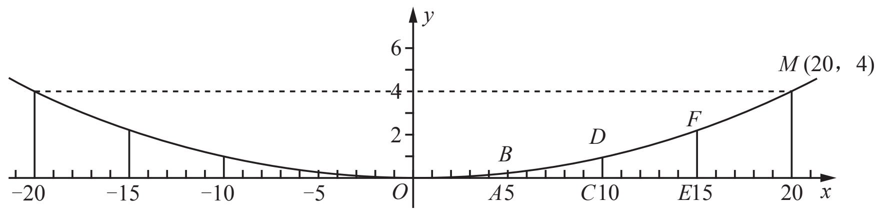


图 3-38

由设计简图可知，$M(20，4)$在抛物线 $y=ax^2$ 上，把$(20，4)$代入 $y=ax^2$，得 $4=a\times 20^2$，解得 $a=0.01$，所以抛物线所对应的二次函数为 $y=0.01x^2$，

设点 B 的坐标为$(5，y_B)$，代入 $y=0.01x^2$. 得 $y_B=0.01\times5^2=0.25$.

所以直拉钢索 AB 的长为 0.25 米.

你能计算出直拉钢索 CD，EF 的长度吗？

练一练

1. 某电子厂商投产一种新型电子产品，每件制造成本为 18 元. 试销过程中发现，每月销售量 y(万件)与销售单价 x(元)之间的关系可以近似地看作一次函数 $y=-2x+100$.(利润=售价−制造成本)

(1)写出每月的利润 z(万元)与销售单价 x(元)之间的函数解析式；

(2)当销售单价为多少元时，厂商每月能获得 350 万元的利润？当销售单价为多少元时，厂商每月能获得最大利润？最大利润是多少？

(3)根据相关部门规定，这种电子产品的销售单价不得高于 32 元. 如果厂商要获得每月不低于 350 万元的利润，那么制造出这种产品每月的最低制造成本需要多少万元？

2. 图 3-39 是一个抛物线形拱桥的示意图，桥的跨度 AB 为 100 m，支撑桥的是一些等距的立柱，相邻立柱间的水平距离为 10 m(不考虑立柱的粗细)，其中距 A 点 10 m 处的立柱 FE 的高度为 3.6 m.

(1)求正中间的立柱 OC 的高度；

(2)是否存在一根立柱，其高度恰好是 OC 的一半？请说明理由.

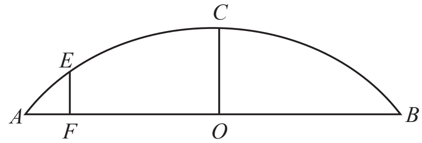


图 3-39

综合练习

一、选择题

1. 实数 x，y 满足 $(x-1)^2+|y|=0$，则点 $P(x, y)$ 在（　　）.

A. 原点　　B. x 轴正半轴　　C. 第一象限　　D. 任意位置

2. 若点 M 的坐标是 (a, b)，且 $a>0$，$b<0$，则点 M 在（　　）.

A. 第一象限　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 如图 3-40 所示，函数 $y=kx+1$ 与函数 $y=\frac{k}{x}$ 在同一平面直角坐标系中的大致图象是（　　）.

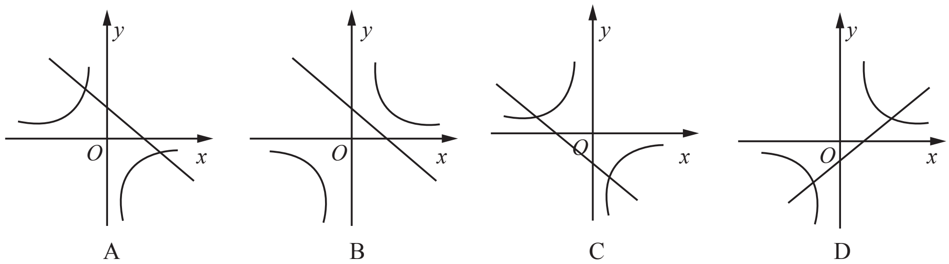


图 3-40

4. 图 3-41 是在同一平面直角坐标系内，二次函数 $y=ax^2+(a+c)x+c$ 与一次函数 $y=ax+c$ 的大致图象，而且只有一个是正确的，正确的是（　　）.

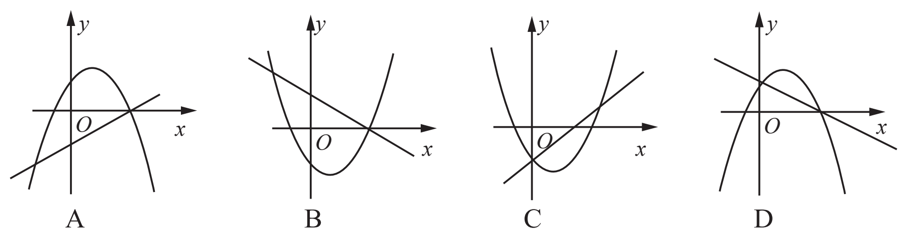


图 3-41

5. 函数 $y=ax+b$ 与 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图 3-42 所示，则下列选项中正确的是（　　）.

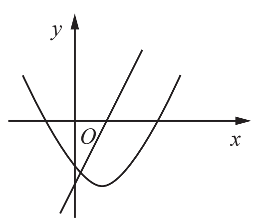


图 3-42

A. $ab>0$，$c>0$　　B. $ab<0$，$c>0$

C. $ab>0$，$c<0$　　D. $ab<0$，$c<0$

6. 抛物线 $y=2(x-1)^2+1$ 的顶点坐标是（　　）.

A. (1，1)　　B. (1，-1)

C. (-1，1)　　D. (-1，-1)

7. 如图 3-43 所示，函数图象①②③的表达式应为(　　).

A. $y=-\frac{5}{2}x$，$y=x+2$，$y=-\frac{4}{x}$

B. $y=\frac{5}{2}x$，$y=-x+2$，$y=\frac{4}{x}$

C. $y=-\frac{5}{2}x$，$y=x-2$，$y=\frac{4}{x}$

D. $y=-\frac{5}{2}x$，$y=x-2$，$y=-\frac{4}{x}$

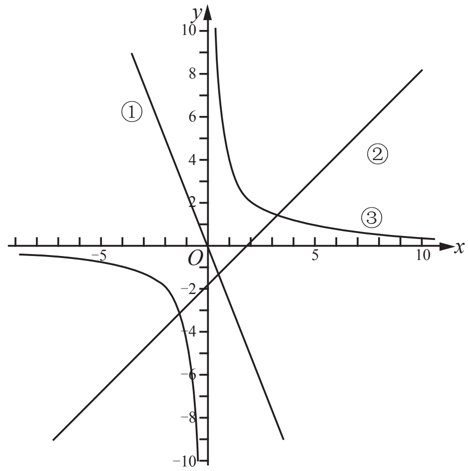


图 3-43

8. 张大伯出去散步，从家走了 20 min，到一个离家 900 m 的阅报亭，看了 10 min 报纸后，用了 15 min 返回到家，图 3-44 中哪个图形表示张大伯离家时间与距离之间的关系(　　).

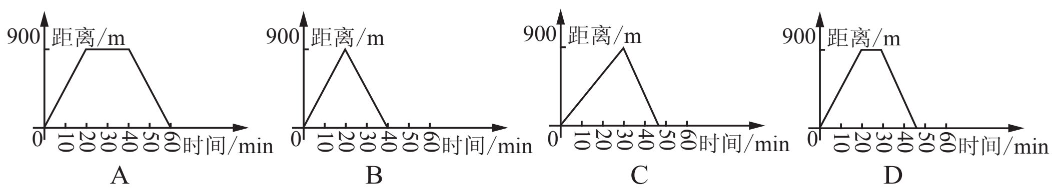


图 3-44

9. 二次函数 $y=x^2-2x+2$ 有(　　).

A. 最大值是 1　　B. 最大值是 2

C. 最小值是 1　　D. 最小值是 2

10. 二次函数 $y=x^2-3x+\frac{3}{2}$ 的图象与 x 轴交点的个数是(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 不能确定

二、填空题

1. 过点 $B(-3，-1)$ 作 x 轴的垂线，垂足对应的数是________，过点 B 作 y 轴的垂线，垂足对应的数是________.

2. 如图 3-45 所示，点 P 是反比例函数 $y=-\frac{2}{x}$ 上的一点，$PD\perp x$ 轴于点 D，则 $\triangle POD$ 的面积为________.

3. 若抛物线 $y=x^2-6x+c$ 的顶点在 x 轴上，则 c 的值是________.

4. 二次函数 $y=x^2+(2m+1)x+(m^2-1)$ 有最小值，则 $m=$________.

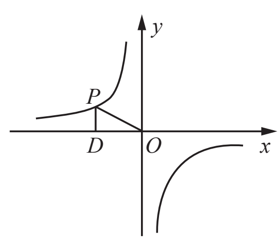


图 3-45

5. 某商场销售一批名牌衬衫，平均每天可售出 20 件，每件可盈利 40 元．为了扩大销售量，增加盈利，采取了降价措施，经调查发现如果每件计划降价 1 元，那么商场平均每天可多售出 2 件．若商场平均每天要盈利 1200 元，则每件衬衫应降价________．

6. 某学生在体育测试时推铅球，铅球所经过的路线是二次函数图象的一部分，如果这名学生出手处为 $A(0, 2)$，铅球路线最高处为 $B(6, 5)$，则该学生将铅球推出的距离是________．

7. 二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的图象与 x 轴交点横坐标为 -2，b，图象与 y 轴交点到原点距离为 3，则该二次函数的解析式为________．

8. 已知函数 $y=\dfrac{m+1}{x}$ 是反比例函数，则 m 的取值范围为________．

三、解答题

1. 已知二次函数 $y=x^2+bx+c$ 的图象经过 $A(0, 1)$，$B(2, -1)$ 两点．

(1)求 b 和 c 的值；

(2)试判断点 $P(-1, 2)$ 是否在此函数图象上？

2. 某商店经营衬衫，已知成批购进时单价是 25 元．根据市场调查，销售量与销售单价满足如下关系：在一段时间内，单价是 135 元时，销售量是 500 件，而单价每降低 10 元，就可以多售出 200 件．请你帮助分析，销售单价是多少时，可以获利最多？

3. 如图 3-46 所示，一边靠校园院墙，另外三边用 50 m 长的篱笆，围起一个长方形场地，设垂直院墙的边长为 x m．

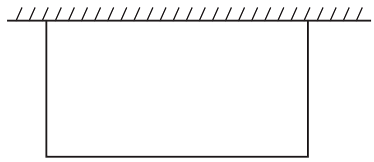


图 3-46

(1)写出长方形场地面积 $y(\text{m}^2)$ 与 x 的函数关系式；

(2)画出函数的图象；

(3)求边长为多少时，长方形面积最大．最大面积是多少？

4. 如图 3-47 所示，有一块底边长为 20 cm，高为 16 cm 的三角形铁皮余料，准备截取一块最大面积的矩形，并使它的一边在三角形的底边上，求截得矩形的长和宽各是多少？

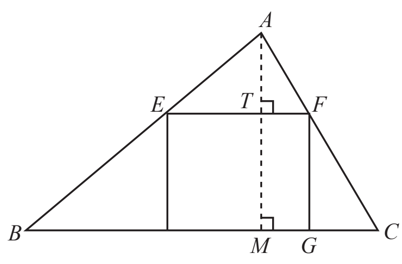


图 3-47

5. 如图 3-48 所示，有一座抛物线形拱桥，桥下面在正常水位 AB 时宽 20 m，水位上升 3 m 就达到警戒线 CD，这时水面宽度为 10 m．

(1)在如图 3-48 的坐标系中求抛物线的解析式．

(2)若洪水到来时，水位以 0.2 m/h 的速度上升，从警戒线开始，再持续多少小时才能到拱桥顶？

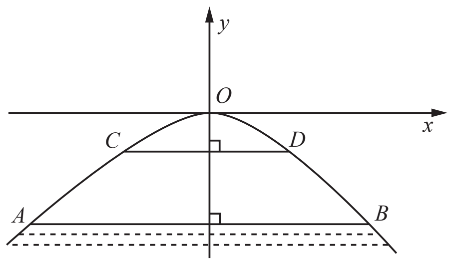


图 3-48

趣味数学

直角坐标系的发明

有一天，笛卡儿(Descartes，1596—1650，法国哲学家、数学家、物理学家)生病卧床，但他头脑一直没有休息，在反复思考一个问题：几何图形是直观的，而代数方程则比较抽象，能不能用几何图形来表示方程呢？这里，关键是如何把组成几何图形的点和满足方程的每一组“数”挂上钩．通过什么样的办法才能把“点”和“数”联系起来呢？突然，他看见屋顶角上的一只蜘蛛，拉着丝垂了下来，一会儿，蜘蛛又顺着丝爬上去，在上边左右拉丝．蜘蛛的“表演”，使笛卡儿的思路豁然开朗．他想，可以把蜘蛛看做一个点，它在屋子里可以上、下、左、右运动，能不能把蜘蛛的每个位置用一组数确定下来呢？他又想，屋子里相邻的两面墙与地面交出了三条直线，如果把地面上的墙角作为起点，把交出来的三条线作为三根数轴，那么空间中任意一点的位置，不是都可以用这三根数轴上找到的有顺序的三个数来表示吗？反过来，任意给一组三个有顺序的数，例如3，2，1，也可以用空间中的一个点 P 来表示它们．同样，用一组数$(a，b)$可以表示平面上的一个点，平面上的一个点也可以用一组两个有顺序的数来表示．于是在蜘蛛的启示下，笛卡儿创建了直角坐标系．

模块 4　平面图形

4.1　线和角

4.1.1　线的相关概念

记一记

【点】线和线相交的地方是点，它是几何图形中最基本的图形.

【线】面和面相交的地方是线，分为直线和曲线.

【面】包围着体的是面，分为平面和曲面.

点动成线，线动成面，面动成体.

【直线】一根拉得很紧的线，就给我们以直线的形象，直线是直的，并且是向两个方向无限延伸的.

【射线】直线上一点和它一旁的部分叫作射线. 这个点叫作射线的端点.

【线段】直线上两个点和它们之间的部分叫作线段. 这两个点叫作线段的端点.

4.1.2　点、直线、射线和线段的表示

记一记

一个点可以用一个大写字母表示. 如点 A、点 M 等.

一条直线可以用一个小写字母表示，也可以用该直线上的两个点对应的大写字母表示. 如直线 AB、直线 PQ、直线 a、直线 m 等；如图 4-1 中直线 MN 也可以用直线 m 表示.

一条射线可以用端点和射线上另一点来表示. 射线 OP 即指射线起点为 O，P 为射线上除 O 外的任意一点. 如图 4-1 中射线 OP，OQ 指同一条射线.

一条线段可用它的端点对应的两个大写字母来表示。线段 EF、线段 AB、线段 PQ 等.

图 4-1

注意：

(1)表示点、直线、射线、线段时，都要在字母前面注明点、直线、射线、线段.

(2)直线和射线无长度，线段有长度.

(3)直线无端点，射线有一个端点，线段有两个端点.

(4)点和直线的位置关系有两种：

①点在直线上，或者说直线经过这个点；

②点在直线外，或者说直线不经过这个点.

议一议

下列说法正确吗？

(1)经过两个点有一条直线，并且只有一条直线.

(2)过一点的直线有无数条.

(3)直线是向两方向无限延伸的，无端点，不可度量，不能比较大小.

(4)直线上有无穷多个点.

(5)两条不同的直线至多有一个公共点.

(6)所有连接两点的线中，线段最短.

注意：两点之间线段最短. 连接两点的线段的长度，叫作这两点间的距离.

4.1.3 垂直平分线

记一记

垂直于一条线段并且平分这条线段的直线叫作这条线段的垂直平分线.

(1)线段垂直平分线上的点和这条线段两个端点的距离相等.

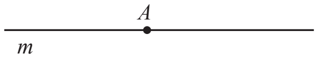
(2)和一条线段两个端点距离相等的点，在这条线段的垂直平分线上.

做一做

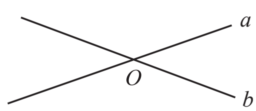
1. 用恰当的几何语言描述图形. 如图4-2(1)可描述为____________________. 如图4-2(2)可描述为________________________________.

解：如图4-2(1)可描述为点 A 在直线 m 上或者描述为直线 m 经过点 A；

图4-2(2)可描述为直线 a 与直线 b 相交于点 O 或者描述为点 O 为直线 a 与直线 b 的交点.



(1)



(2)

图 4-2

2. 要在墙上固定一根木条，至少需要几根钉子，为什么？

解： 因为两点确定一条直线，所以墙上固定一根木条，需要两根钉子.

3. 平面内有三个点，过任意两点画一条直线，则可以画直线的条数是（　　）.

A. 2 条　　B. 3 条　　C. 4 条　　D. 1 条或 3 条

解： 分两种情况：(1)三个点若共线则只可以画 1 条直线；(2)若三个点不共线则可以画 3 条直线.

4. 如图 4-3 所示，从 A 到 B 最短的路线是（　　）.

A. $A—G—E—B$　　B. $A—C—E—B$

C. $A—D—G—E—B$　　D. $A—F—E—B$

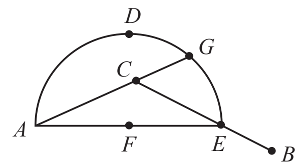


图 4-3

解： 三角形两边之和大于第三边，即 $AC+CE>AE$，所以从 A 到 B 最短的路线是 $A—F—E—B$.

5. 汽车灯所射出的光线可以近似地看成（　　）.

A. 线段　　B. 射线　　C. 直线　　D. 曲线

解： 线段有两个端点，射线只有一个端点，直线没有端点，因此汽车灯所射出的光线可以近似看成射线.

练一练

1. 如图 4-4 所示，点 C 在线段 AB 上，$AC=8$ cm，$CB=6$ cm，点 M，N 分别是 AC，BC 的中点.

(1)求线段 MN 的长；

(2)若点 C 为线段 AB 上任一点，满足 $AC+CB=a$ cm，其他条件不变，你能猜想线段 MN 的长度吗？并说明理由.

图 4-4

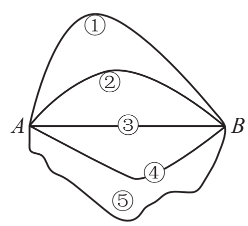


图 4-5

2. 如图 4-5 所示，从 A 地到 B 地共有五条路，且五条路路况基本相同，你应选择第几条路？为什么呢？

3. 如图 4-6 所示，在数轴上有 A，B，C，D，E 五个整数点（即各点均表示整数），且 $AB=2BC=3CD=4DE$，若 A，E 两点表示的数分别为 -13 和 12，那么，在数轴上五个点所表示的整数中，离线段 AE 的中点最近的整数是（　　）.

A. -2　　B. -1　　C. 0　　D. 2

图 4-6

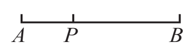


图 4-7

4. 如图 4-7 所示，把一根绳子对折成线段 AB，从 P 处把绳子剪断，已知 $AP=\frac{1}{2}PB$，若剪断后的各段绳子中最长的一段为 40 cm，则绳子的原长为(　　).

A. 30 cm　　B. 60 cm　　C. 120 cm　　D. 60 cm 或 120 cm

4.1.4　角的相关概念

记一记

【角】有公共端点的两条射线组成的图形叫作角，这个公共端点叫作角的顶点，这两条射线叫作角的边.

当角的两边(两条射线)重合时组成的角叫作零角($\alpha=0°$)；当角的两边在一条直线上时(两条射线方向相反)，组成的角叫作平角($\alpha=180°$)。平角的一半叫作直角($\alpha=90°$)；小于直角的角叫作锐角($0°<\alpha<90°$)；大于直角且小于平角的角叫作钝角($90°<\alpha<180°$).

如果两个角的和是直角，那么这两个角叫作互为余角，其中一个角叫作另一个角的余角.

如果两个角的和是平角，那么这两个角叫作互为补角，其中一个角叫作另一个角的补角.

做一做

已知一个角的补角比它的余角的 2 倍大 20°，则这个角的度数为多少？

分析：本题考查补角、余角的定义，学会运用方程的思想来解决问题.

设这个角为 α，则 $180°-\alpha=2(90°-\alpha)+20°$，解之得 $\alpha=20°$.

4.1.5　角的表示

记一记

角可以用大写英文字母、阿拉伯数字或小写的希腊字母表示，具体有以下四种表示方法(图 4-8).

①用数字表示单独的角，如$\angle 1$，$\angle 2$，$\angle 3$ 等.

②用小写的希腊字母表示单独的一个角，如$\angle\alpha$，$\angle\beta$，$\angle\gamma$，$\angle\theta$ 等.

③用一个大写英文字母表示一个独立(在一个顶点处只有一个角)的角，如$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 等.

④用三个大写英文字母表示一个角.

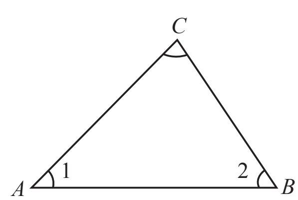


图 4-8

如图 4-8 中$\angle CAB$ 也可用$\angle 1$ 表示，还可用$\angle A$ 表示；同样$\angle CBA$ 也可用$\angle 2$ 表示还可用$\angle B$ 表示等.

注意：用三个大写英文字母表示角时，一定要把顶点字母写在中间，边上的字母写在两侧.

4.1.6 角的度量和换算

记一记

角的度量有如下规定：把一个周角分为360等份，每一份就是1度的角，单位是度，用“°”表示，1度记作“1°”，n度记作“$n°$”. 把1°的角60等分，每一份叫作1分的角，1分记作“1′”. 把1′的角60等分，每一份叫作1秒的角，1秒记作“1″”.

1度＝60分（1°＝60′）；1分＝60秒（1′＝60″）.

做一做

1. 钟表中时针每分钟转多少度？

分析：因为分针每分钟转1个小格，时针每分钟转1/12小格，而分针每转动1小格对应的度数是$\frac{1}{60}\times 360°=6°$，故时针每分钟转动的角度是$\frac{1}{12}\times 6°=\left(\frac{1}{2}\right)°$.

2.（1）把26.29°转化为用度、分、秒表示的形式；（2）把59°31′30″转化成用度表示的形式.

分析：（1）此类型的题目主要是逐步把度的小数部分化成分，把分的小数部分化成秒. 度、分、秒之间的换算是60进制.

解：（1）$0.29°=0.29\times 60'=17.4'$，$0.4'=0.4\times 60''=24''$，

$\therefore 26.29°=26°17'24''$.

（2）$\because 1'=60''$，所以$30''=0.5'$；

$\because 1°=60'$，$\therefore 31.5'=31.5'\div 60=0.525°$.

$\therefore 59°31'30''=59.525°$.

3. 计算下列各题：

（1）$153°39'44''+26°40'38''$；

（2）$53°25'28''\times 5$.

分析：有关度、分、秒的计算是角度计算的主要内容，一是要注意它们之间的换算关系；二是要注意把单位相同的数对应计算.

解：（略）.

总结：角的度数的换算有两种方法：度、分、秒之间的计算满60进1，不足则借1抵60.

①由度化成度、分、秒的形式（即从高位向低位化），$1°=60'$，$1'=60''$；

②由度、分、秒的形式化成度（即从低位向高位化），$1''=\left(\frac{1}{60}\right)'$，$1'=\left(\frac{1}{60}\right)°$.

练一练

1. 把33°24′36″化成度的形式.

2. 计算：

(1)$22°36'-18°22'$；　　(2)$34°57'+25°36'$.

记一记

角的度量制度除了角度制以外，还经常用另一种制度：弧度制.

定义： 等于半径长的圆弧所对的圆心角，叫作 1 弧度的角，记为 1 rad，也可以记为 1.

一般地，

$$|\alpha|=\frac{L}{r}.$$

这里，L 是一段弧的弧长，r 是该弧所在圆的半径，$|\alpha|$ 是圆心角的弧度数的绝对值，这种用弧度作单位来度量角的制度，叫作弧度制.

如图 4-9 所示，$\overset{\frown}{AB}$的弧长等于半径，$\overset{\frown}{AB}$所对的圆心角就是 1 弧度的角.

因为圆的周长等于半径的 2π 倍，所以整个圆所对的圆心角是 2π 弧度的角.

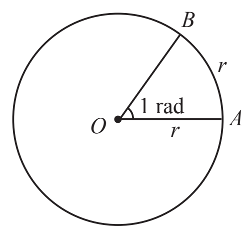


图 4-9

所以，

$$180°=\pi.$$

显然，一些特殊角的角度与弧度之间有如下换算关系，见表 4-1.

表 4-1

角度	360°	270°	180°	90°	60°	45°	30°	0°
弧度	2π	$\frac{3\pi}{2}$	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

做一做

1. 把下列各角度化为弧度.

(1)$22°30'$；　(2)$1°$；　(3)$-135°$；　(4)$-750°$.

解： (1)$22°30'=22.5°=\frac{\pi}{180}\times 22.5=\frac{\pi}{8}$；

(2)$1°=\frac{\pi}{180}\times 1\approx\frac{3.1416}{180}\approx 0.01745$；

(3)$-135°=-\frac{\pi}{180}\times 135=-\frac{3\pi}{4}$；

(4)$-750°=-(720°+30°)=-\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{13\pi}{6}$.

2. 把下列各弧度化成角度.

(1)$\frac{3\pi}{5}$；　　(2)1.

解：(1)$\frac{3\pi}{5}=\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}\times\frac{3\pi}{5}=108^{\circ}$；

(2)$1=\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}\times 1\approx\left(\frac{180}{3.1416}\right)^{\circ}\approx 57^{\circ}18'$.

3. 公路拐弯处近似是一段圆弧$\overset{\frown}{AB}$，它所对的圆心角是 60°，半径为 45 cm，求圆弧$\overset{\frown}{AB}$的长(精确到 0.1).

解：$60^{\circ}=\frac{\pi}{3}$，

$l=|\alpha|r=\frac{\pi}{3}\times 45\text{ cm}\approx 3.14\times 15\text{ cm}=47.1\text{ cm}$，

所以圆弧$\overset{\frown}{AB}$的长约为 47.1 cm.

练一练

1. 把下列各角度化成弧度.

(1)18°；　　(2)−780°.

2. 把下列各弧度化成角度.

(1)$\frac{\pi}{12}$；　　(2)$-\frac{4\pi}{3}$.

3. 已知在半径等于 120 cm 的圆上，一条弧长是 145.5 cm，求这条弧所对的圆心角的角度数.

议一议

下列说法正确吗？

(1)角的大小与边的长短无关，只与构成角的两条射线的幅度大小有关；

(2)角的大小可以度量，可以比较；

(3)角可以参与运算.

4.1.7　角的平分线

记一记

一条射线把一个角分成两个相等的角，这条射线叫作这个角的平分线.

(1)角平分线上的点到这个角的两边的距离相等.

(2)到一个角的两边距离相等的点在这个角的平分线上.

做一做

1. 如图 4-10 所示，在△ABC 中，∠$A=90^{\circ}$，BD 是角平分线，若 $AD=m$，$BC=n$，求△BDC 的面积.

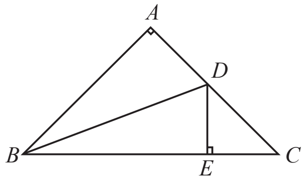


图 4-10

解：过点 D 作 $DE\perp BC$，垂足为 E，

∵BD 是角平分线，$AD\perp AB$，$DE\perp BC$，

$\therefore DE=AD=m$，

$\therefore S_{\triangle BDC}=\frac{1}{2}BC\times DE=\frac{1}{2}nm.$

2. 如图 4-11 所示，某市有一块由三条马路围成的三角形绿地，现准备在其中建一小亭，供人们小憩，而且要使小亭中心到三条马路的距离相等，试确定小亭的中心位置(不写作法，保留作图痕迹).

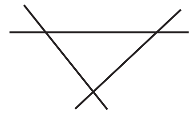


图 4-11

分析：到三条马路的距离相等的点在每两条马路所成角的平分线上，可作任意两个角的平分线，其交点即为所求小亭的中心位置.

解：(略).

练一练

1. 如图 4-12 所示，要在 M 区建一个大型超级购物中心 G，使它到两条公路的距离相等，离两公路交叉处 1 000 m，这个超级购物中心应建于何处(在图上标出点 G 的位置，比例尺为 1∶50 000)?

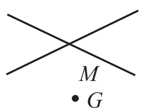


图 4-12

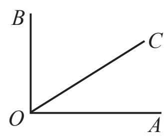


图 4-13

2. 如图 4-13 所示，已知$\angle AOB=90°$，$\angle BOC=60°$，用尺规作图法做出$\angle AOC$ 的平分线 OD，并求$\angle BOD$.

4.1.8 相交线与平行线

记一记

1. 相交线中的角

两条直线相交，可以得到四个角，我们把两条直线相交所构成的四个角中，有公共顶点但没有公共边的两个角叫作对顶角. 我们把两条直线相交所构成的四个角中，有公共顶点且有一条公共边的两个角叫作邻补角.

邻补角互补，对顶角相等.

如图 4-14 所示，直线 AB，CD 与 EF 相交(或者说两条直线 AB，CD 被第三条直线 EF 所截)，构成八个角. 其中$\angle 1$ 与$\angle 5$ 这两个角分别在 AB，CD 的上方，并且在 EF 的同侧，像这样位置相同的一对角叫作同位角；$\angle 3$ 与$\angle 5$ 这两个角都在 AB，CD 之间，并且在 EF 的异侧，像这样位置的两个角叫作内错角；$\angle 3$ 与$\angle 6$ 在直线 AB，CD 之间，并且在 EF 的同侧，像这样位置的两个角叫作同旁内角.

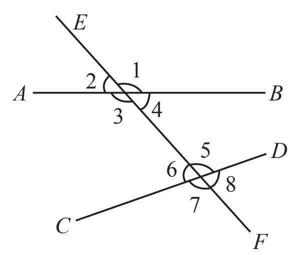


图 4-14

2. 垂线

两条直线相交所成的四个角中，有一个角是直角时，就说这两条直线互相垂直. 其中一条直线叫作另一条直线的垂线，它们的交点叫作垂足. 如图 4-15 所示，直线 AB，CD 互相垂直，O 为垂足，记作“$AB \perp CD$”(或“$CD \perp AB$”)，读作“AB 垂直于 CD”(或“CD 垂直于 AB”).

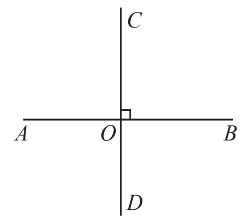


图 4-15

3. 平行线

平行线的定义及其表示方法：在同一平面内不相交的两条直线叫作平行线. 如图 4-16 所示，直线 a 与直线 b 互相平行，记作“$a /\!/ b$”，读作 a 平行于 b.

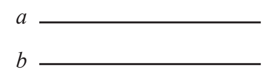


图 4-16

注意：

(1)平行线是无限延伸的，无论怎样延伸也不相交.

(2)当遇到线段、射线平行时，指的是线段、射线所在的直线平行.

想一想

在同一平面内，两条不重合的直线的位置关系有几种呢？如果 $a /\!/ b$，$b /\!/ c$，那么 a 与 c 的位置关系是什么？如果 $a \perp c$，$b \perp c$，那么 a 与 b 的位置关系是什么？

做一做

1. 如图 4-17 所示，直线 AB，CD 相交于 O，$\angle BOC = 120°$，OE 是 $\angle BOC$ 的角平分线，OF 是 OE 的反向延长线.

(1)求 $\angle 1$，$\angle 2$ 的度数；

(2)试说明：OF 平分 $\angle AOD$.

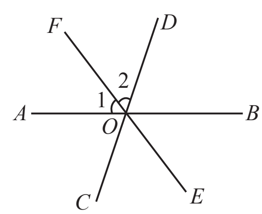


图 4-17

解：(1)$\because OF$ 是 OE 的反向延长线.

$\therefore \angle 1 = \angle BOE$，$\angle 2 = \angle COE$，

$\because OE$ 是 $\angle BOC$ 的角平分线，$\therefore \angle BOE = \angle COE = \dfrac{1}{2}\angle BOC = 60°$，

$\therefore \angle 1 = \angle 2 = 60°$.

(2)$\because \angle 1 = \angle 2 = 60°$，$\therefore OF$ 平分 $\angle AOD$.

2. 如图 4-18 所示，在一条笔直的公路 AB 两侧，分别有 M，N 两个村庄，(1)现要在公路 AB 上建一个汽车站 C，使汽车站到 M，N 两村距离之和最小，问汽车站 C 的位置应该如何确定？(2)一辆汽车在公路 AB 上由 A 向 B 行驶，设汽车行驶到点 P 位置时离村庄 M 最近；行驶到点 Q 位置时，距离村庄 N 最近，请在图中公路 AB 上分别画出 P，Q 两点的位置.

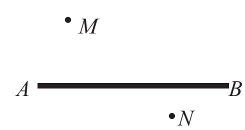


图 4-18

解：(1)把 MN 用直线连接与 AB 相交于一点，在这点建一个汽车站 C，该汽车站到 M，N 两村距离之和最小，因为两点之间直线段最短.

(2)过点 M 作 AB 的垂线，垂足即为点 P，过点 N 作 AB 的垂线，垂足即为点 Q.(点与直线之间的连线，垂线段最短)

3. 如图 4-19 所示. $\angle 1=\angle 2$，$\angle D=90°$，$EF\perp CD$. 求证：$\angle 3=\angle B$.

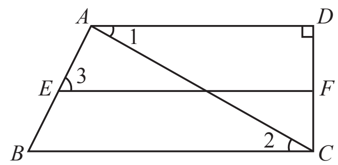


图 4-19

分析：如果 $\angle 3=\angle B$，则应需 $EF/\!/BC$. 又知 $\angle 1=\angle 2$，则有 $BC/\!/AD$. 从而，应有 $EF/\!/AD$. 这一点从条件 $EF\perp CD$ 及 $\angle D=90°$不难获得.

证明：因为 $\angle 1=\angle 2$，所以 $AD/\!/BC$(内错角相等，两直线平行).

因为 $\angle D=90°$及 $EF\perp CD$，所以 $AD/\!/EF$(同位角相等，两直线平行).

所以 $BC/\!/EF$(平行公理)，

所以 $\angle 3=\angle B$(两直线平行，同位角相等).

议一议

下列说法正确吗？

(1)经过直线外一点，有且只有一条直线与这条直线平行.

(2)直线外一点与直线上各点连接的所有线段中，垂线段最短.

(3)两条直线被第三条直线所截，如果同位角相等，那么两直线平行.

(4)两条直线被第三条直线所截，如果同旁内角互补，那么两直线平行.

(5)两直线平行，内错角相等.

(6)过一点有且只有一条直线与已知直线垂直.

练一练

1. 如图 4-20 所示，$AB/\!/CD$，$\angle A=135°$，$\angle E=80°$. 求$\angle CDE$ 的度数.

2. 一学员在广场上练习驾驶汽车，若其两次拐弯后仍沿原方向前进，则两次拐弯的角度可能是(　　).

A. 第一次向左拐 30°，第二次向右拐 30°

B. 第一次向右拐 30°，第二次向左拐 130°

C. 第一次向右拐 50°，第二次向右拐 130°

D. 第一次向左拐 50°，第二次向左拐 130°

3. 如图 4-21 所示是一条河，C 是河边 AB 外一点.

(1)过点 C 要修一条与河平行的绿化带，请做出正确的示意图.

(2)现欲用水管从河边 AB，将水引到 C 处，请在图上测量并计算出水管至少要多少？

（本图比例尺为 1∶2 000）

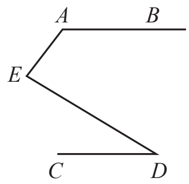


图 4-20

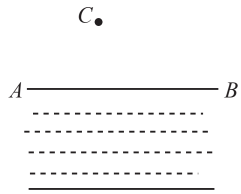


图 4-21

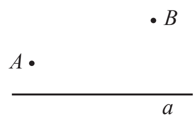


图 4-22

4. 如图 4-22 所示，一个人要从 A 地出发去河 a 中挑水，并把水送到 B 地，那么这个人如何行走，才能使行走的距离最近，画出示意图，并说出理由.

5. 如图 4-23 所示，$CD /\!/ AB$，$\angle DCB=70°$，$\angle CBF=20°$，$\angle EFB=130°$，问直线 EF 与 CD 有怎样的位置关系？为什么？

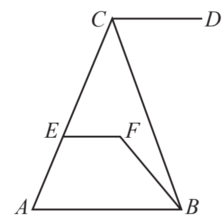


图 4-23

4.2 三角形

想一想

木工师傅在修理桌椅时，常常在桌椅下边斜着钉一根木条。这是为什么呢?

三角形的形状是固定的，三角形的这个性质叫作三角形的稳定性. 三角形的这个性质在生产生活中应用很广，需要稳定的东西一般都制成三角形的形状.

4.2.1 三角形中的相关概念

记一记

由不在同一直线上的三条线段首尾顺次相接所组成的图形叫作三角形. 组成三角形的线段叫作三角形的边；相邻两边的公共端点叫作三角形的顶点；相邻两边所组成的角叫作三角形的内角，简称三角形的角. 三角形用符号“△”表示，顶点是 A，B，C 的三角形记作“$\triangle ABC$”，读作“三角形 ABC”.

4.2.2 三角形中的主要线段及面积计算

记一记

(1)三角形的角平分线：三角形的一个角的平分线与这个角的对边相交，交点和这个角的顶点间的线段叫作三角形的角平分线. 如图 4-24 中的 AD，BE，CF.

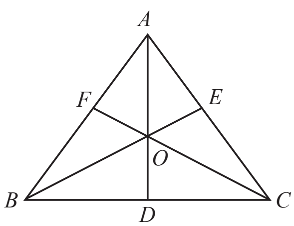


图 4-24

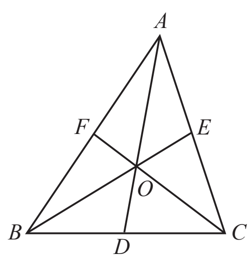


图 4-25

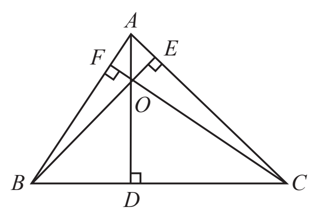


图 4-26

(2)三角形的中线：在三角形中，连接一个顶点和它对边的中点的线段叫作三角形的中线. 如图 4-25 中的 AD，BE，CF 分别叫作 BC，AC，AB 边上的中线(简称三角形的中线). 三角形三条中线的交点叫作三角形的重心。图 4-25 中的点 O 就是$\triangle ABC$ 的重心. 且重心到顶点的距离等于相应中线的$\frac{2}{3}$，即 $BO=\frac{2}{3}BE$，$OE=\frac{1}{3}BE$，$AO=\frac{2}{3}AD$.

(3)三角形的高：从三角形一个顶点向它的对边做垂线，顶点和垂足之间的线段叫作三角形的高线. 如图 4-26 中 AD，BE，CF 分别叫作 BC，AC，AB 边上的高(简称三角形的高). 三角形三条高线的交点叫作三角形的垂心. 图 4-26 中的点 O 就是$\triangle ABC$ 的垂心.

(4)垂直平分线：过三角形每条边的中点做垂直于此边的直线即为垂直平分线. 如图 4-27中的点 D，E，F 分别为 BA，BC，AC 的中点，$OD\perp AB$，$OE\perp CB$，$OF\perp AC$. 即 OD，OE，OF 分别为边 BA，BC，AC 的垂直平分线且 $OB=OA=OC$.

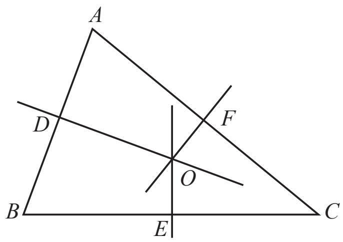


图 4-27

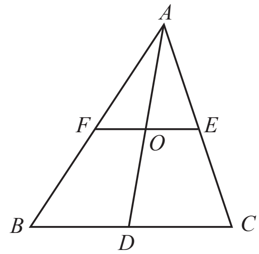


图 4-28

(5)三角形的中位线：连接三角形两边中点的线段叫作三角形的中位线. 要注意三角形的中线与中位线的区别. 如图 4-28 中 EF 是一条中位线，AD 是一条中线.

三角形的中位线平行于第三边，并且等于它的一半，即 $EF=\frac{1}{2}BC$.

此结论可以用于确定两条直线是否平行，也可以用于确定线段的倍分关系.

想一想

三角形的面积如何计算呢？

三角形的面积 $=\frac{1}{2}\times$ 底 $\times$ 高.

议一议

下列说法正确吗？

(1)三角形的两边之和大于第三边，三角形的两边之差小于第三边.

(2)直角三角形的两个锐角互余.

(3)三角形的一个外角等于和它不相邻的两个内角的和.

(4)三角形的高线、中线和角平分线三线合一.

(5)在同一个三角形中：等角对等边；等边对等角；大角对大边；大边对大角.

(6)一个三角形中至少有两个锐角.

(7)钝角三角形有两条高线在三角形外.

(8)在直角三角形中，如果一个锐角等于 30°，那么它所对的直角边等于斜边的一半.

(9)直角三角形只有一条高.

(10)三角形共有三条中位线，它们又重新构成一个新的三角形，并且周长为原三角形周长的一半.

练一练

1. 下列每组数分别是三根小木棒的长度，用它们能制作三角形木架的是(　　).

A. 3 cm，4 cm，8 cm　　B. 8 cm，7 cm，15 cm

C. 13 cm，12 cm，20 cm　　D. 5 cm，5 cm，11 cm

2. 若三角形铁片的三条边长是连续的偶数，周长为30，则这个三角形最小的边长等于多少？

3. 如图4-29所示，CD是$\triangle ABC$的中线，且$CD=\frac{1}{2}AB$，你知道$\angle ACB$的度数是多少吗？由此你能得到一个什么结论？请叙述出来与你的同伴交流.

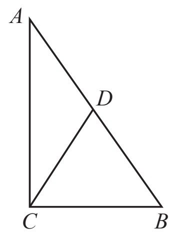


图4-29

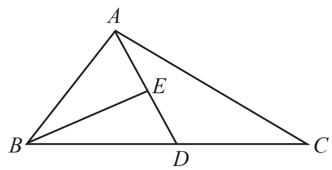


图4-30

4. 如图4-30所示，AD为$\triangle ABC$的中线，BE为$\triangle ABD$的中线.

(1)$\angle ABE=15°$，$\angle BAD=40°$，求$\angle BED$的度数；

(2)在$\triangle BED$中作BD边上的高；

(3)若$\triangle ABC$的面积为40，$BD=5$，则点E到BC边的距离为多少？

5. 如图4-31所示，桥梁的斜拉钢索是三角形的结构，主要是为了(　　).

A. 节省材料，节约成本　　B. 保持对称

C. 利用三角形的稳定性　　D. 美观漂亮

6. 某人想知道自家一块三角形田地的面积，不知道怎么测量和计算，你能帮他吗？田地形状如图4-32(比例尺为1∶10 000). 需要学生自己量距离，然后按比例尺折算，最后算面积.

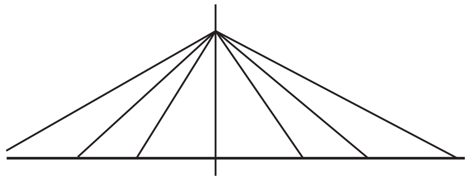


图4-31

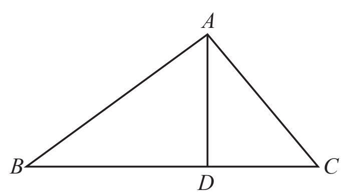


图4-32

4.2.3　等腰三角形

记一记

有两条边相等的三角形是等腰三角形．相等的两条边叫作腰，另一条边叫作底边．两腰所夹的角叫作顶角，腰与底边的夹角叫作底角．三条边都相等的三角形是等边三角形．

想一想

以下说法是否正确呢？

①等腰三角形的两个底角相等．

②等腰三角形顶角平分线平分底边并且垂直于底边，即等腰三角形的顶角平分线、底边上的中线、底边上的高重合．

③等边三角形的各个角都相等，并且每个角都等于 60°．

④等腰三角形的底角只能为锐角，不能为钝角（或直角），但顶角可为钝角（或直角）．

⑤有一个角是 60° 的等腰三角形是等边三角形．

⑥等腰三角形的三角关系：设顶角为 $\angle A$，底角为 $\angle B$，$\angle C$，则 $\angle A=180^\circ-2\angle B$，$\angle B=\angle C=\dfrac{180^\circ-\angle A}{2}$．

做一做

1．若一个等腰三角形模板的三边长为 3，5，x，则 x 的取值范围是多少？

解：三角形两边之和大于第三边，三角形两边之差小于第三边，所以 $5-3<x<5+3$，即 $2<x<8$．

2．如图 4-33 所示，标杆 AB 的高为 5 m，为了将它固定，需要由它的中点 C 向地面上与点 B 距离相等的 D，E 两点拉两条绳子，使得 D，B，E 在一条直线上，量得 $DE=4$ m，则绳子 CD 和 CE 要多长？

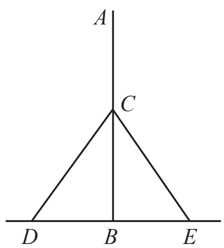


图 4-33

分析：这是一个与实际生活相关的问题，解决这类型问题，需要将实际问题抽象为数学模型．本题是在等腰三角形中已知等腰三角形的底边和底边上的高，求腰长的问题．

解：（略）．

3．图 4-34 是屋架设计图的一部分，点 D 是斜梁 AB 的中点，立柱 BC、DE 垂直于横梁 AC，$AB=7.4$ m，$\angle A=30^\circ$，立柱 BC，DE 要多长？

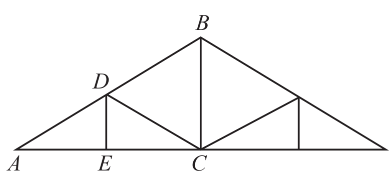


图 4-34

解：观察图形可以发现在 Rt$\triangle AED$ 与 Rt$\triangle ACB$ 中，由于 $\angle A=30^\circ$，所以 $DE=\dfrac{1}{2}AD$，$BC=\dfrac{1}{2}AB$，又

由 D 是 AB 的中点，所以 $DE=\frac{1}{4}AB=\frac{1}{4}\times 7.4=1.85(\mathrm{m})$，$BC=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 7.4=3.7(\mathrm{m})$.

练一练

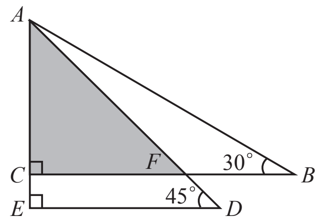


图 4-35

1. 如图 4-35 所示，将一副三角尺叠放在一起，若 $AB=14\ \mathrm{cm}$，则阴影部分的面积是多少？

2. 某中学师生在工厂学习劳动中，看到工人师傅在材料的边角处画直角时，采用“三弧法”.

(1)画线段 AB，分别以 A，B 为圆心，AB 长为半径画弧相交于点 C；

(2)以 C 为圆心，仍以 AB 长为半径画弧，交 AC 的延长线于 D；

(3)连接 DB，则$\angle ABD$ 为直角. 这是为什么呢?

3. 已知：如图 4-36 所示，房屋顶角$\angle BAC=100°$，过屋顶 A 的立柱 $AD\perp BC$，屋檐 $AB=AC$. 求顶架上的$\angle B$，$\angle C$，$\angle BAD$，$\angle CAD$ 的度数.

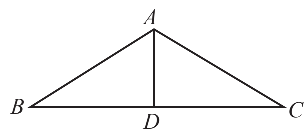


图 4-36

提示：

(1)等腰三角形中顶角与底角的关系：①顶角$+2\times$底角$=180°$；②顶角$=180°-2\times$底角.

(2)等腰三角形中，顶角和底角的取值范围：若顶角为 α，底角为 β，则由以上①，②可得 $0°<\alpha<180°$，$0°<\beta<90°$.

4.2.4 三角形的分类

记一记

三角形按边的关系分类如下：

$$\text{三角形}\begin{cases}\text{不等腰三角形}\\ \text{等腰三角形}\begin{cases}\text{底和腰不相等的等腰三角形}\\ \text{等边三角形}\end{cases}\end{cases}$$

三角形按角的关系分类如下：

$$\text{三角形}\begin{cases}\text{直角三角形(有一个角为直角的三角形)}\\ \text{斜三角形}\begin{cases}\text{锐角三角形(三个角都是锐角的三角形)}\\ \text{钝角三角形(有一个角为钝角的三角形)}\end{cases}\end{cases}$$

把边和角联系在一起，我们又有一种特殊的三角形：等腰直角三角形. 它是两条直角边相等的直角三角形.

想一想

下列三角形：①有两个角等于 $60°$；②有一个角等于 $60°$的等腰三角形；③三个外角

（每个顶点处各取一个外角）都相等的三角形；④一腰上的中线也是这条腰上的高的等腰三角形．其中是等边三角形的有（　　）．

A．①②③　　B．①②④　　C．①③　　D．①②③④

4.2.5　全等三角形

记一记

（1）全等三角形的相关概念

能够完全重合的两个图形叫作全等形．能够完全重合的两个三角形叫作全等三角形．两个三角形全等时，互相重合的顶点叫作对应顶点，互相重合的边叫作对应边，互相重合的角叫作对应角．夹边就是三角形中相邻两角的公共边，夹角就是三角形中有公共端点的两边所成的角．

（2）全等三角形的表示

全等用符号“$\cong$”表示，读作“全等于”．如$\triangle ABC \cong \triangle DEF$，读作“三角形 ABC 全等于三角形 DEF”．

注：记两个全等三角形时，通常把表示对应顶点的字母写在对应的位置上．

（3）三角形全等的判定定理：

边角边定理：有两边和它们的夹角对应相等的两个三角形全等（可简写成“边角边”或“SAS”）．

角边角定理：有两角和它们的夹边对应相等的两个三角形全等（可简写成“角边角”或“ASA”）．

边边边定理：有三边对应相等的两个三角形全等（可简写成“边边边”或“SSS”）．

直角三角形全等的判定：

对于直角三角形，判定它们全等时，还有 HL 定理（斜边、直角边定理）：有斜边和一条直角边对应相等的两个直角三角形全等（可简写成“斜边、直角边”或“HL”）．

议一议

以下说法正确吗？

①全等三角形的对应角、对应边都相等．

②全等三角形的对应边上的高对应相等．

③全等三角形的对应角的角平分线相等．

④全等三角形面积、周长都相等．

⑤全等三角形的对应边上的中线相等．

⑥三条中位线将原三角形分割成四个全等的三角形．

做一做

1．如图 4-37 所示是一个三角测平架，$AB=AC$，在 BC 的中点 D 处悬挂一重锤 DE

（自然下垂），要使 BC 处于水平位置（即 BC 与重锤线 DE 垂直），只要调整架身使点 A 恰在重锤线 DE 上就行，这是什么原因？

分析： 要说明 BC 处于水平位置，即 $BC\perp DA$，根据垂直的定义并结合图形，只要说明 $\angle ADB=\angle ADC=90°$ 即可，这样只要说明 $\triangle ADC\cong\triangle ADB$。根据已知条件并结合图形，用“SSS”就可证明 $\triangle ADC\cong\triangle ADB$.

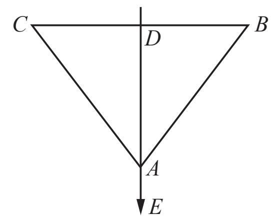


图 4-37

解： 因为 $AC=AB$，$DC=DB$，$AD=AD$. 根据“SSS”可证明 $\triangle ADC\cong\triangle ADB$，

所以 $\angle ADB=\angle ADC=90°$，即 $BC\perp DA$.

因 DE 处于垂直位置，故 BC 处于水平位置.

2. 如图 4-38，小明同学不慎将一三角形玻璃打碎成两块，他是否只带其中的一块就可以配一块与原来一样的三角形玻璃呢？为什么？

分析： 若想配一块和原来三角形全等的三角形玻璃，根据三角形全等的条件，图 4-38 中的图②符合“ASA”全等，所以应带②去配玻璃.

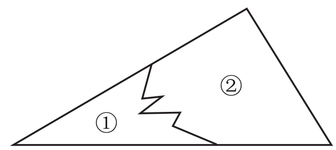


图 4-38

练一练

1. 如图 4-39 所示，在折纸活动中，小明制作了一张 $\triangle ABC$ 纸片，点 D，E 分别在边 AB，AC 上，将 $\triangle ABC$ 沿着 DE 折叠压平，A 与 A' 重合，若 $\angle A=75°$，则 $\angle 1+\angle 2$ 等于多少度？

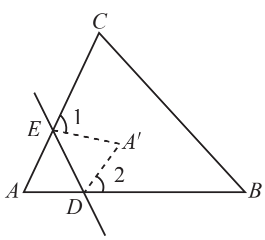


图 4-39

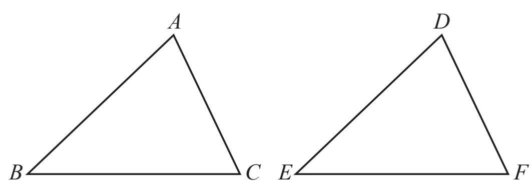


图 4-40

2. 如图 4-40 所示，用同样粗细、同种材料的金属构制两个全等三角形，$\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$，已知 $\angle B=\angle E$，$\angle C=\angle F$，AC 的质量为 25 g，EF 的质量为 30 g，求金属丝 AB 的质量的取值范围.

4.3 四边形

4.3.1 四边形的相关概念

记一记

【四边形】在同一平面内，由不在同一直线上的四条线段首尾顺次相接的图形叫作四边形.

【对角线】在四边形中，连接不相邻两个顶点的线段叫作四边形的对角线.

四边形的不稳定性：三角形的三边如果确定后，它的形状、大小就确定了，这是三角形的稳定性. 但是四边形的四边确定后，它的形状不能确定，这就是四边形所具有的不稳定性，它在生产、生活方面也有着广泛的应用.

【平行四边形】两组对边分别平行的四边形叫作平行四边形.

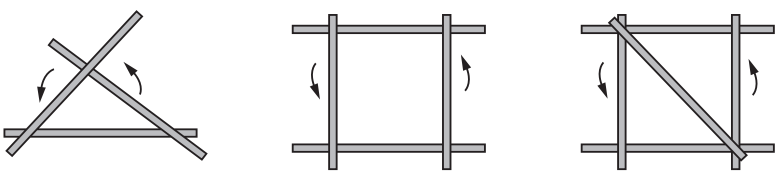
平行四边形用符号“▱”表示，如平行四边形 $ABCD$ 记作“▱$ABCD$”，读作“平行四边形 $ABCD$”.

两条平行线的距离：两条平行线中，一条直线上的任意一点到另一条直线的距离，叫作这两条平行线的距离。平行线间的距离处处相等.

想一想

1. 把三根木条用钉子钉成一个三角形木架，然后扭动它，它的形状会改变吗？
2. 把四根木条用钉子钉成一个四边形木架，然后扭动它，它的形状会改变吗？
3. 在四边形的木架上再钉一根木条，将它的一对顶点连接起来，然后扭动它，它的形状会改变吗？

三角形具有稳定性的特点. 四边形具有不稳定性. 因此图 4-41 中(1)的情况不会改变；(2)的情况会改变；(3)的情况不会改变. 同样盖房子时，在窗框未安装好之前，木工师傅常常先在窗框上斜钉一根木条就是这个道理.



(1)　　(2)　　(3)

图 4-41

4.3.2 几种特殊的四边形

记一记

【矩形】有一个角是直角的平行四边形叫作矩形.

【菱形】有一组邻边相等的平行四边形叫作菱形.

【正方形】有一组邻边相等并且有一个角是直角的平行四边形叫作正方形.

【梯形】一组对边平行而另一组对边不平行的四边形叫作梯形.

梯形中平行的两边叫作梯形的底，通常把较短的底叫作上底，较长的底叫作下底.梯形中不平行的两边叫作梯形的腰. 梯形的两底的距离叫作梯形的高.

两腰相等的梯形叫作等腰梯形. 一腰垂直于底的梯形叫作直角梯形.

议一议

以下说法是否正确?

(1)矩形具有平行四边形的一切性质.

(2)对角线相等的平行四边形是矩形.

(3)菱形具有平行四边形的一切性质.

(4)四边都相等的四边形是菱形.

(5)菱形的对角线互相垂直平分，并且每一条对角线平分一组对角.

(6)有一个角是直角的菱形是正方形.

(7)正方形具有平行四边形、矩形、菱形的一切性质.

(8)一组对边平行且不相等的四边形是梯形.

(9)梯形中位线平行于两底，并且等于两底和的一半.

(10)等腰梯形的对角线相等.

做一做

1. 如图 4-42 所示，平行四边形 $ABCD$ 中，若 $AB=3$，$AD=4$，$\angle ABC$ 的角平分线交 AD 于点 E，交 CD 的延长线于点 F，求 DF 的长.

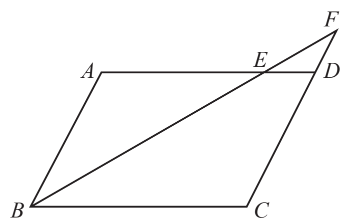


图 4-42

解：∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴$AB /\!/ CD$，$AB=CD=3$，$BC=AD=4$，

∴$\angle ABF=\angle CBF$，

∴$\angle CFB=\angle CBF$，

∴$CF=BC=4$，

∴$DF=CF-CD=4-3=1$.

2. 如图 4-43 所示，在一张矩形木板 $ABCD$ 上，做 $DE\perp AC$ 于 E，$\angle ADE:\angle EDC=3:2$，则$\angle BDE$ 的度数是多少?

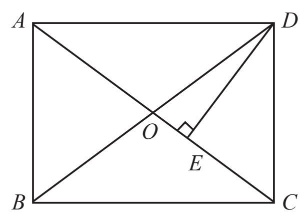


图 4-43

解：∵木板 $ABCD$ 为矩形，四个角为直角.

∴$\angle ADC=90°$，

∵$\angle ADE:\angle EDC=3:2$，

∴$\angle ADE=90°\times 3/5=54°$，$\angle EDC=90°\times 2/5=36°$，

∵$\angle DCE=54°$，

∴$OC=OD$，∴$\angle ODC=\angle DCE=54°$，

∴$\angle BDE=\angle ODC-\angle EDC=54°-36°=18°$.

4.3.3 几种常用四边形面积的计算

记一记

(1)平行四边形的面积：$S_{平行四边形}=底边长\times高=ah$.

(2)正方形的面积：设正方形边长为 a，对角线长为 b，$S_{正方形}=a^2=\dfrac{b^2}{2}$.

(3)矩形的面积：$S_{矩形}=长\times宽=ab$.

(4)菱形的面积：$S_{菱形}=底边长\times高=两条对角线乘积的一半$.

(5)梯形的面积：如图 4-44，

$S_{梯形ABCD}=\dfrac{1}{2}(CD+AB)\cdot DE$.

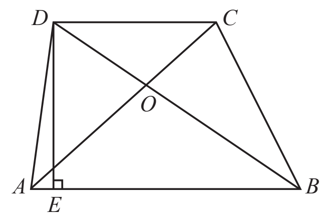


图 4-44

梯形中有关图形的面积：① $S_{\triangle ABD}=S_{\triangle BAC}$；② $S_{\triangle AOD}=S_{\triangle BOC}$；③$S_{\triangle ADC}=S_{\triangle BCD}$.

做一做

某村要挖一条长 1 500 m 的水渠，渠道的横断面为等腰梯形，渠道深 0.8 m，渠底宽为 1.2 m，腰与渠底的夹角为 135°，问挖此渠需挖出土多少立方米？

解：如图 4-45 所示，设等腰梯形 $ABCD$ 为渠道横断面，分别作 $DE\perp AB$，$CF\perp AB$. 垂足为 E，F，

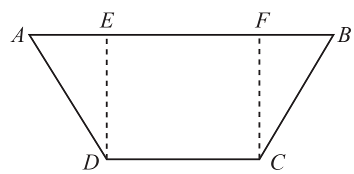


图 4-45

则 $CD=1.2$ m，$DE=CF=0.8$ m，

$\angle ADC=\angle BCD=135°$，

$AB/\!/CD$，$\angle A+\angle ADC=180°$，

∴$\angle A=45°=\angle B$.

又 $DE\perp AB$，$CF\perp AB$.　∴$\angle EDA=\angle A$，　$\angle BCF=\angle B$，

∴$AE=DE=CF=BF=0.8$ (m).

又∵四边形 $CDEF$ 是矩形，∴$EF=CD=1.2$ (m).

$S_{梯形ABCD}=\dfrac{1}{2}(AB+CD)\cdot DE=\dfrac{1}{2}(1.2+0.8\times 2+1.2)\times 0.8=1.6$，

∴所挖土方为 $1.6\times 1\,500=2\,400$ (m^3).

【总结】解决本题的关键是数学建模，求梯形面积时，注意作辅助线，把梯形问题向三角形和矩形转化.

练一练

1. 如图 4-46 所示，矩形中按虚线剪开后，能拼成平行四边形，又能拼成直角三角形的是(　　).

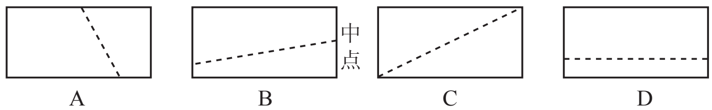


图 4-46

2. 菱形的两条对角线分别是 6 cm，8 cm，则菱形的边长为多少？面积为多少？

3. 若将木条钉成的矩形木框变为平行四边形的形状，并使其面积为矩形的一半，则平行四边形的最小内角度数是多少？

趣味数学

福尔摩斯巧辨平行四边形

一天，大侦探福尔摩斯来平行四边形先生家做客，走进院子，看到一大群四边形孩子正在玩耍.

福尔摩斯问平行四边形先生道：“平行四边形先生，这些孩子都是你们家的吗?”

平行四边形先生说：“我们家哪有这么多孩子呀！都说你是神探，你能从中辨别出哪些是我们平行四边形家族的成员吗?”

神探福尔摩斯答道：“那我就试试吧！不过我有个要求，他们必须说说各自的特征.”

“当然可以.”平行四边形先生爽快地答道. 只见平行四边形先生安排院子里的孩子们依次过来.

四边形 1 说：“我的两组对边分别平行.”

福尔摩斯判断说：“这个是.”

四边形 2 说：“我的两组对边分别相等.”

福尔摩斯判断说：“这个是.”

四边形 3 说：“我有一组对边平行且相等.”

福尔摩斯判断说：“这个是.”

四边形 4 说：“我的两组对边角分别相等.”

福尔摩斯判断说：“这个是.”

四边形 5 说：“我的对角线互相平分.”

福尔摩斯判断说：“这个是.”

四边形 6 说：“我有一组对边平行，另一组对边相等.”

福尔摩斯判断说：“这个不是.”

四边形 7 说：“我有一组对边相等，且有一组对角相等.”

福尔摩斯判断说："这个不是."

四边形8说："我有一组对边平行，且有一组对角相等."

福尔摩斯判断说："这个是."

"真是名副其实的神探."平行四边形先生称赞道："神探的判断完全正确，咱们回屋再叙."

一边说一边走，二位老友径直向客厅迈去.

4.4 圆

4.4.1 圆的相关概念

议一议

下水井盖为什么是圆形的呢？

下水井盖做成圆形的既节约井盖的材料，又保证了井口的安全.

记一记

1. 圆的定义

在一个平面内，线段 OA 绕它固定的一个端点 O 旋转一周，另一个端点 A 随之旋转所形成的图形叫作圆，固定的端点 O 叫作圆心，线段 OA 叫作半径.

2. 圆的几何表示

以点 O 为圆心的圆记作“$\odot O$”，读作“圆 O”.

3. 弦、弧等与圆有关的定义

【弦】连接圆上任意两点的线段叫作弦. 如图 4-47 中的 AB.

【直径】经过圆心的弦叫作直径. 如图 4-47 中的 CD，直径等于半径的 2 倍.

【半圆】圆的任意一条直径的两个端点分圆成两条弧，每一条弧都叫作半圆.

【弧】圆上任意两点间的部分叫作圆弧，简称弧。弧用符号“⌒”表示，以 A，B 为端点的弧记作“$\overset{\frown}{AB}$”，读作“圆弧 AB”或“弧 AB”.

【圆心角】顶点在圆心的角叫作圆心角. 如图 4-47 中的 $\angle AOB$，$\angle DOB$.

【弦心距】从圆心到弦的距离叫作弦心距. 如图 4-47 中的 OF.

【圆周角】顶点在圆上，并且两边都和圆相交的角叫作圆周角. 如图 4-47 中的$\angle AEB$.

【圆心距】两圆圆心之间的距离叫作两圆的圆心距.

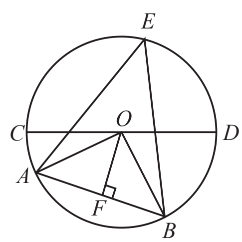


图 4-47

议一议

以下说法是否正确？

(1)垂直于弦的直径平分这条弦，并且平分弦所对的弧.

(2)弦的垂直平分线经过圆心，并且平分弦所对的两条弧.

(3)圆的两条平行弦所夹的弧相等.

(4)圆是轴对称图形，经过圆心的每一条直线都是它的对称轴.

(5)一条弧所对的圆周角等于它所对的圆心角的一半.

(6)同弧或等弧所对的圆周角相等；同圆或等圆中，相等的圆周角所对的弧也相等.

(7)半圆(或直径)所对的圆周角是直角；90°的圆周角所对的弦是直径.

(8)如果三角形一边上的中线等于这边的一半，那么这个三角形是直角三角形.

4.4.2 点与圆的位置关系

记一记

设$\odot O$半径r，点P到圆心距离为d，如图4-48所示.

则$d<r \Leftrightarrow$点P在$\odot O$内；$d=r \Leftrightarrow$点P在$\odot O$上；$d>r \Leftrightarrow$点P在$\odot O$外.

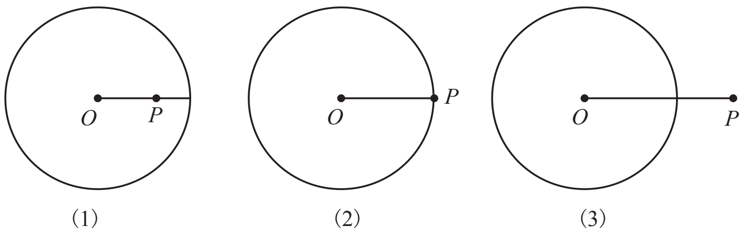


图 4-48

4.4.3 直线与圆的位置关系

记一记

直线和圆有三种位置关系，具体如图4-49所示.

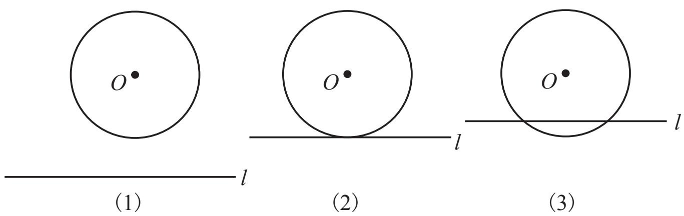


图 4-49

(1)相交：直线和圆有两个公共点时，叫作直线和圆相交，这时直线叫作圆的割线，公共点叫作交点. 如图4-49中图(3).

(2)相切：直线和圆有唯一公共点时，叫作直线和圆相切，这时直线叫作圆的切线. 如图4-49(2)中的直线l.

(3)相离：直线和圆没有公共点时，叫作直线和圆相离. 如图4-49(1)中的直线l.

若$\odot O$半径r，圆心O到直线l距离为d：则

直线l与$\odot O$相离$\Leftrightarrow d>r$；

直线l与$\odot O$相切$\Leftrightarrow d=r$；

直线l与$\odot O$相交$\Leftrightarrow d<r$.

注意：经过半径的外端并且垂直于这条半径的直线是圆的切线. 圆的切线垂直于经

过切点的半径.

1. 三角形的内切圆

(1)三角形的内切圆：与三角形的各边都相切的圆叫作三角形的内切圆.

(2)三角形的内切圆的圆心是三角形的三条内角平分线的交点，也就是三角形的内心. 如图 4-50 所示 .

2. 三角形的外接圆

(1)三角形的外接圆：经过三角形三个顶点的圆叫作三角形的外接圆.

(2)三角形的外接圆的圆心是三角形的三边垂直平分线的交点，也就是三角形的外心. 如图 4-51 所示 .

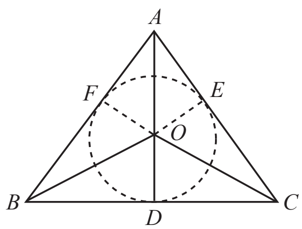


图 4-50

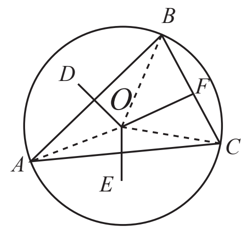


图 4-51

4. 4. 4　圆与圆的位置关系

记一记

1. 圆与圆的位置关系

在纸上画一个半径为 2 cm 的圆，每个人都准备一个钥匙环当作另一个圆，在纸上移动钥匙环，观察两圆的位置关系和公共点的个数.

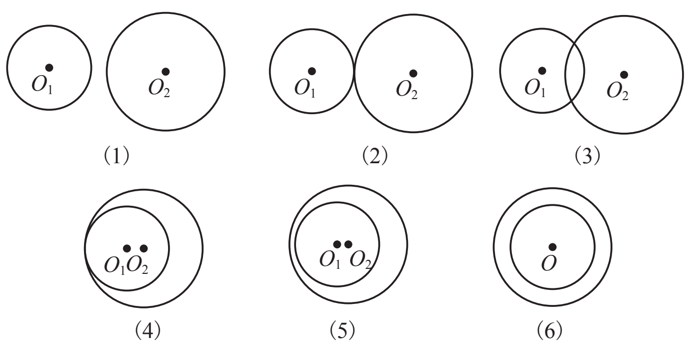


图 4-52

大小不同的两个圆的位置关系如下.

(1)外离：两个圆没有公共点，并且每个圆上的点都在另一个圆的外部时，叫作这两个圆外离.（图 4-52 中的图(1)）

(2)外切：两个圆有唯一的公共点，并且除了这个公共点以外，每个圆上的点都在另一个圆的外部时，叫作这两个圆外切．这个唯一的公共点叫作切点．(图 4-52 中的图(2))

(3)相交：两个圆有两个公共点，此时叫作这两个圆相交．(图 4-52 中的图(3))

(4)内切：两个圆有唯一的公共点，并且除了这个公共点以外，一个圆上的点都在另一个圆的内部时，叫作这两个圆内切．这个唯一的公共点叫作切点．(图 4-52 中的图(4))

(5)内含：两个圆没有公共点，并且一个圆上的点都在另一个圆的内部时，叫作这两个圆内含(图 4-52 中的图(5))．两圆同心是两圆内含的一个特例．(图 4-52 中的图(6))

设两圆的半径分别为 R 和 r，圆心距为 d，那么，两圆外离$\Leftrightarrow d>R+r$；两圆外切$\Leftrightarrow d=R+r$；两圆相交$\Leftrightarrow R-r<d<R+r(R\geqslant r)$；两圆内切$\Leftrightarrow d=R-r(R>r)$；两圆内含$\Leftrightarrow d<R-r(R>r)$．

2．两圆相切、相交的重要性质

如果两圆相切，那么切点一定在连心线上，它们是轴对称图形，对称轴是两圆的连心线；相交的两个圆的连心线垂直平分两圆的公共弦．

4.4.5 正多边形与圆

记一记

(1)正多边形的定义：各边相等、各角也相等的多边形叫作正多边形．

(2)正多边形和圆的关系：只要把一个圆分成相等的一些弧，就可以做出这个圆的内接正多边形，这个圆就是这个正多边形的外接圆．

4.4.6 弧长、扇形面积和与圆有关的计算

记一记

(1)弧长公式：$n°$的圆心角所对的弧长 l 的计算公式为$\frac{n\pi r}{180}$．

(2)扇形面积公式：$S_{扇}=\frac{n}{360}\pi R^2=\frac{1}{2}lR$，其中 n 是扇形的圆心角度数，R 是扇形的半径，l 是扇形的弧长．

(3)圆锥的侧面积：$S_{侧面积}=\frac{1}{2}\times l\times 2\pi r=\pi rl$，其中 l 是圆锥的母线长，r 是圆锥的底面半径．圆锥沿一条母线剪开、展开即得一扇形，此扇形的弧长为圆锥的底面周长，扇形的半径为圆锥的母线长．

(4)圆柱的侧面积：$S_{侧面积}=2\pi rl$，其中 l 是圆柱的母线长(或高)，r 是圆柱的底面半径．圆柱沿一条母线剪开、展开即得一矩形，此矩形的长为圆柱的底面周长，矩形的宽为圆柱的母线长(或高)．

做一做

1. 要制作一个圆锥形屋顶模型(如图 4-53)，已知圆锥形屋顶模型的底面周长为 58 cm，高为 20 cm，要制作 20 个这样的模型至少要用多少平方厘米的不锈钢材料？(结果精确到 0.1 cm^2)

分析：要计算制作 20 个这样的圆锥形屋顶模型至少要用多少平方厘米的不锈钢材料，只要计算圆锥形屋顶的侧面积.

解：设圆锥形屋顶的底面半径为 r cm，母线长为 L cm，由 $2\pi r=58$，得 $r=\frac{58}{2\pi}=\frac{29}{\pi}$，根据勾股定理，圆锥母线$L=\sqrt{\left(\frac{29}{\pi}\right)^2+20^2}\approx22.03$，

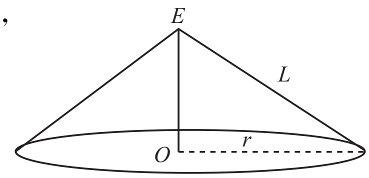


图 4-53

$S_{纸帽的侧面积}=\frac{1}{2}\cdot2\pi\cdot r\cdot L=29\times22.03=638.87\ cm^2$.

$\therefore 638.87\times20=12\ 777.4(cm^2)$.

所以，至少需要 12 777.4 (cm^2)的不锈钢材料.

2. 有一座圆弧形拱桥如图 4-54，圆心为 O，桥下水面宽度为 $AB=7.2$ m，过点 O 作 $OC\perp AB$ 于 D 点，交圆弧于点 C，$CD=2.4$ m，现有一艘宽 3 m、船舱顶部为方形并高出水面 AB 2 m 的货船要经过拱桥，问此货船能否顺利通过这座拱桥？

解：$\because AB=7.2$ m，$CD=2.4$ m，$EF=3$ m，且点 D 为 EF 的中点，

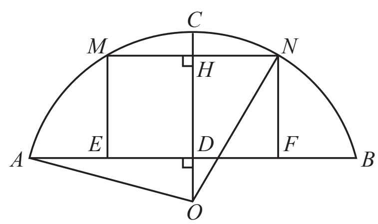


图 4-54

$\therefore OC\perp AB$，$OC\perp MN$，

设 $OA=R$，则 $OD=OC-DC=R-2.4$，

$AD=\frac{1}{2}AB=3.6$ m，

在 Rt$\triangle OAD$ 中，有 $OA^2=AD^2+OD^2$，

即 $R^2=\sqrt{3.6^2+(R-2.4)^2}$，解得 $R=3.9$，

在 Rt$\triangle ONH$ 中，$OH=\sqrt{R^2-HN^2}=3.6$，

$\therefore FN=DH=OH-OD=3.6-(3.9-2.4)=2.1$，

$\because 2.1\ m>2\ m$，货船可以顺利通过这座拱桥.

3. 某居民小区一处圆柱形的输水管道破裂，维修人员为更换管道，需确定管道圆形截面的半径. 图 4-55 是水平放置的破裂管道有水部分的截面.

(1)你能补全这个输水管道的圆形截面吗？

(2)若这个输水管道有水部分的水面宽 $AB=16$ cm，水面最深地方的高度为 4 cm，求这个圆形截面的半径.

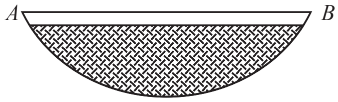


图 4-55

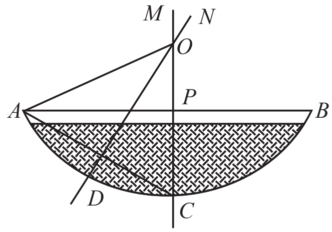


图 4-56

分析：要补全这个输水管道的圆形截面，只要找到圆心 O，然后以 O 为圆心，以 OA 为半径画圆即可.

解：(1)如图 4-56，先做弦 AB 的垂直平分线 MC，交$\overset{\frown}{AB}$于 C 点，然后连接 AC；再做弦 AC 的垂直平分线 ND，直线 MC 与直线 ND 的交点即为圆心 O. 最后以 O 为圆心，以 OA 为半径画圆即可.

(2)设半径为 R，在 $\text{Rt}\triangle OPA$ 中，$AP=\frac{1}{2}AB=8$，$OP=R-PC=R-4$，根据勾股定理得，$OA^2=OP^2+AP^2$，即 $R^2=(R-4)^2+8^2$，解得，$R=10$.

练一练

1. 如图 4-57 所示，圆弧形桥拱的跨度 $AB=12$ m，拱高 $CD=4$ m，则拱桥的半径为（　　）.

A. 6.5 m　　B. 9 m　　C. 13 m　　D. 15 m

2. 如图 4-58 所示，一大圆内套若干小圆，大圆周长与小圆周长之和哪个大？为什么？

3. 工程上常用钢珠来测量零件上小孔的直径，假设钢珠的直径是 12 mm，测得钢珠顶端离零件表面的距离为 9 mm，如图 4-59 所示，则这个小孔的直径 AB 是多少毫米？

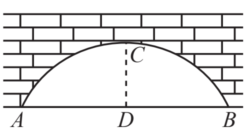


图 4-57

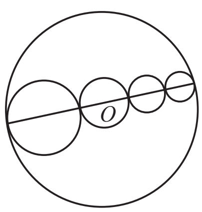


图 4-58

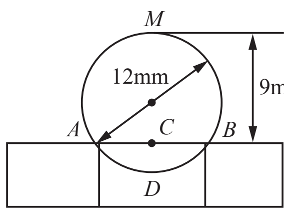


图 4-59

4. 由上往下看，四个马口铁罐头整齐排列成如图 4-60 所示的形状，其中每一个罐头的半径都是 4 cm，用丝带沿罐头的周围绑一圈，则需用多长的丝带？

提示：由图 4-60 可知：丝带的长为 4 个$\frac{1}{4}$圆弧长（一个半径为 4 cm 的圆周长）与 4 个直径长之和.

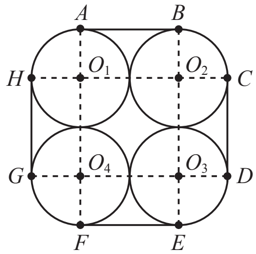


图 4-60

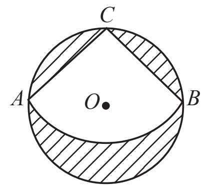


图 4-61

5．如图 4-61 所示，有一直径是 1 m 的圆形铁皮，要从中剪出一个最大的圆心角是 90°的扇形 CAB.

(1)被剪掉的阴影部分的面积是多少?

(2)若用所留的扇形铁皮围成一个圆锥，该圆锥的底面圆的半径是多少?(结果可用根号表示)

4.5 图形的相似

4.5.1 比例线段

记一记

1. 比例线段的相关概念

如果选用同一长度单位量得两条线段 a，b 的长度分别为 m，n，那么就说这两条线段的比是 $\frac{a}{b}=\frac{m}{n}$ 或写成 $a:b=m:n$.

在两条线段的比 $a:b$ 中，a 叫作比的前项，b 叫作比的后项.

在四条线段中，如果其中两条线段的比等于另外两条线段的比，那么这四条线段叫作成比例线段，$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，简称比例线段.

2. 比例的性质

(1)基本性质：①$a:b=c:d \Leftrightarrow ad=bc$；　　②$a:b=b:c \Leftrightarrow b^2=ac$.

4.5.2 相似三角形

记一记

1. 相似三角形的概念

对应角相等，对应边成比例的三角形叫作相似三角形. 相似用符号“∽”来表示，读作“相似于”. 相似三角形对应边的比叫作相似比(或相似系数).

2. 相似三角形的基本定理

平行于三角形一边的直线和其他两边(或两边的延长线)相交，所构成的三角形与原三角形相似.

如图 4-62 所示，用数学语言表述如下：

$\because DE /\!/ BC$，$\therefore \triangle ADE \backsim \triangle ABC$.

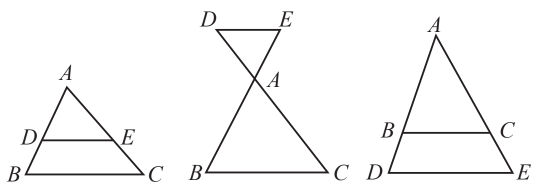


图 4-62

3. 三角形相似的判定

(1)三角形相似的判定方法

①定义法：对应角相等，对应边成比例的两个三角形相似.

②平行法：平行于三角形一边的直线和其他两边(或两边的延长线)相交，所构成的三角形与原三角形相似.

③判定定理1：如果一个三角形的两个角与另一个三角形的两个角对应相等，那么这两个三角形相似，可简述为两角对应相等，两三角形相似.

④判定定理2：如果一个三角形的两条边和另一个三角形的两条边对应成比例，并且夹角相等，那么这两个三角形相似. 可简述为两边对应成比例且夹角相等，两三角形相似.

⑤判定定理3：如果一个三角形的三条边与另一个三角形的三条边对应成比例，那么这两个三角形相似. 可简述为三边对应成比例，两三角形相似.

(2)直角三角形相似的判定方法

①以上各种判定方法均适用.

②定理：如果一个直角三角形的斜边和一条直角边与另一个直角三角形的斜边和一条直角边对应成比例，那么这两个直角三角形相似.

③垂直法：直角三角形被斜边上的高分成的两个直角三角形与原三角形相似.

4. 相似三角形的性质

(1)相似三角形的对应角相等，对应边成比例；

(2)相似三角形对应高的比、对应中线的比与对应角平分线的比都等于相似比；

(3)相似三角形周长的比等于相似比；

(4)相似三角形面积的比等于相似比的平方.

5. 相似多边形

(1)如果两个边数相同的多边形的对应角相等，对应边成比例，那么这两个多边形叫作相似多边形. 相似多边形对应边的比叫作相似比(或相似系数).

(2)相似多边形的性质：

①相似多边形的对应角相等，对应边成比例；

②相似多边形周长的比、对应对角线的比都等于相似比；

③相似多边形中的对应三角形相似，相似比等于相似多边形的相似比；

④相似多边形面积的比等于相似比的平方.

议一议

以下说法正确吗？

(1)放大镜下的三角形与原三角形是相似形.

(2)镜子中的形象与你本人相似.

(3)你看到过哈哈镜吗？哈哈镜中的形象与你本人相似.

(4)所有的长方形都是相似形.

(5)所有的圆都是相似形.

(6)所有的等边三角形都是相似形.

(7)所有的三角形都是相似形.

(8)将一个五边形各边放大 3 倍，这个五边形的形状不变.

(9)用同一张底片洗出的不同尺寸的照片，改变了人物的形状.

(10)复印一个几何图形，如正方形、长方形等不会改变所复印图形的形状和大小.

4.5.3　相似图形的应用——测量物体的高度

想一想

如何测量旗杆高度呢？

分析：方法 1：选一个阳光明媚的日子，请你的同学量出你在太阳下的影子的长度和旗杆影子的长度，再根据你的身高，便可以计算出旗杆的高度.（图 4-63）

由于太阳光可以把它看成是平行的，所以有$\angle CAB=\angle C'A'B'$，又因为旗杆和人都是垂直于地面的，所以$\angle ABC=\angle A'B'C'=90°$，所以，$\triangle ACB\backsim\Delta A'C'B'$，因此，$\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{B'C'}{A'B'}$，则 $BC=AB\times\dfrac{B'C'}{A'B'}$，即可求得旗杆 BC 的高度.

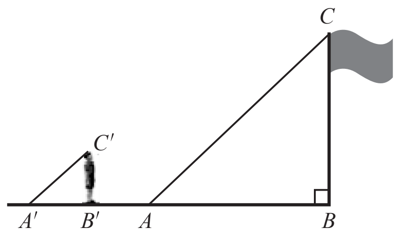


图 4-63

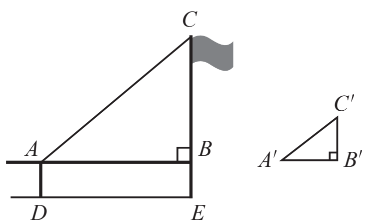


图 4-64

如果遇到阴天，就你一个人，是否可以用其他方法大致测出旗杆的高度呢？

方法 2：如图 4-64 所示，在离旗杆的底部 E 处 10 m 的 D 点，用所制作的测角仪测出视线与水平线的夹角$\angle BAC$，并且已知测角仪的高 AD 为 1 m，现在请你按 1∶500(根据具体情况而定，选合适的即可)比例将$\triangle ABC$ 画在纸上，并记作$\triangle A'C'B'$，用刻度尺量出纸上 $B'C'$的长度，便可以计算旗杆的大致高度.

由图 4-64 可知：

$\because\angle BAC=\angle B'A'C'=34°$，$\angle ABC=\angle A'B'C'=90°$，

$\therefore\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C,'$　　　$\therefore\dfrac{B'C'}{BC}=\dfrac{1}{500}$，

$\therefore BC=500B'C'$，$CE=BC+BE$，即可求得旗杆的高度.

【小结】用相似三角形的性质来测量旗杆的高度，在学习中掌握其原理，并学会应用知识解决问题的方法.

做一做

1. 如图 4-65，AB 表示一个窗户的高，AM 和 BN 表示射入室内的光线，窗户的下

端到地面的距离 $BC=1$ m，已知某一时刻 BC 在地面的影长 $CN=1.5$ m，AC 在地面的影长 $CM=4.5$ m，求窗户的高度.

解：显然 $\triangle AMC\backsim\triangle BNC$，$\therefore \dfrac{CB}{CA}=\dfrac{CN}{CM}$，即 $\dfrac{1}{CA}=\dfrac{1.5}{4.5}$，

$\therefore CA=3$ m，$\therefore AB=CA-BC=3-1=2$(m).

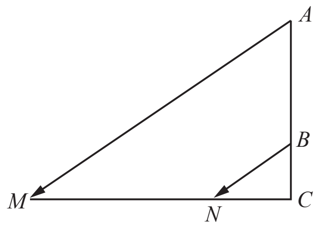


图 4-65

2. 某生活小区的居民筹集资金 1 600 元，计划在一块上、下底分别为 10 m，20 m 的梯形空地上种植花木(图 4-66).

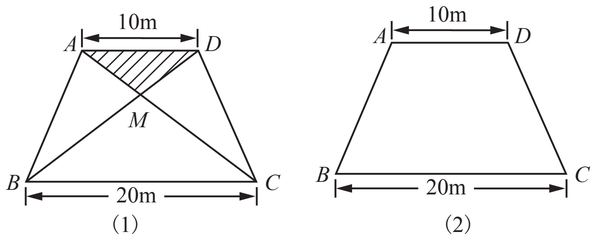


图 4-66

(1)他们在$\triangle AMD$ 和$\triangle BMC$ 地带上种植太阳花，单价为 8 元/m^2，当$\triangle AMD$ 地带种满花后(图形阴影部分)，共花了 160 元. 请计算种满$\triangle BMC$ 地带所需的费用；

(2)若其余地带要种的有玫瑰和茉莉花两种花木可供选择，单价分别为 12 元/m^2 和 10 元/m^2. 应选择哪能种花木种植，可以刚好用完所筹集的资金？

解：(1)$\because$四边形 $ABCD$ 是梯形，$\therefore AD\parallel BC$，

$\therefore \triangle AMD\backsim\triangle CMB$，$S_{\triangle AMD}:S_{\triangle CMB}=10^2:20^2=1:4$，故$\triangle BMC$ 地带花费为 $160\div 8\times 4\times 8=640$(元).

(2)$S_{梯形ABCD}=180\ m^2$，$S_{\triangle AMB}+S_{\triangle DMC}=180-20-80=80\ (m^2)$，

$\therefore 160+640+80\times 12=1\ 760$ 元，$160+640+80\times 10=1\ 600$(元)，

$\therefore$种植茉莉花刚好用完所筹集的资金.

练一练

1. 在比例尺是 1∶38 000 的南京交通游览图上，玄武湖隧道长约 7 cm，则它的实际长度约为________ km.

2. 小明家的园子里有一三角形的花圃，将它的大小按 1∶100 画在纸上，如图 4-67，现量得所画图形中 BC 边长为 3.5 cm，高 AD 为 2 cm，求花圃的面积.

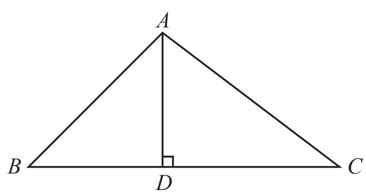


图 4-67

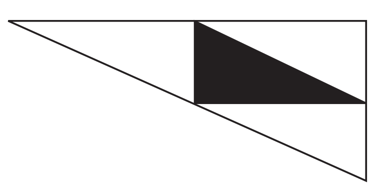


图 4-68

3. 厨房角柜的台面是三角形(图 4-68)，如果把各边中点连线所围成三角形铺成黑色大理石，其余部分铺成白色大理石，则黑色大理石的面积与白色大理石的面积之比为多少?

4. 高 4 m 的旗杆在水平地面的影子长 6 m，此时测得附近一个建筑物的影子长 24 m，求该建筑物的高度.

趣味数学

丁丁游世博

2010 年 5 月 1 日第 53 届世界博览会在上海开幕，丁丁在爸爸的带领下来到了世博园，他们在一个展区的“游览说明”前停了下来，只见展牌上写道：这是一块长为 100 m，宽为 50 m 的矩形展区(图 4-69)，A，B 两点处是两个入口，EE_1 处是一个出口，道路两边是平行的，且 $AA_1=AA_2=1$ m，$BB_1=BB_2=1$ m，$EE_1=2$ m，余下的三个部分都是参展的花卉区域……

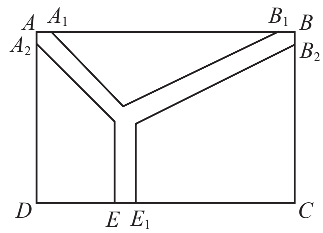


图 4-69

看到这里，爸爸对丁丁说：“丁丁，你能算出栽植花卉区域的面积吗?”

丁丁说：“让我想想，看看能不能用学过的几何知识来解决.”

丁丁开动脑筋思考：这三部分分别计算各自的面积比较困难，能不能把它们放在一起计算呢? 因为平移不改变图形的形状和大小，所以可以通过平移的办法把它们放在一起. 将左右两侧的两块分别向中间平移 1 m，上面的一块向下平移 1 m，那么三块花卉用地正好拼成一个长为 98 m，宽为 49 m 的矩形. 因此花卉用地的总面积为 $98\times49=4\ 802(\text{m}^2)$.

当丁丁把他的解答告诉爸爸时，爸爸脸上露出了满意的笑容.

综合练习

一、填空题

1. 四条线段长度分别为 3 cm，5 cm，8 cm，9 cm，选三条线段组成一个三角形，则三角形的周长为________.

2. 菱形面积为 24，两条对角线的比为 3∶4，则两条对角线长分别是________.

3. 要从一张长为 40 cm，宽为 20 cm 的矩形纸片中，剪出长为 18 cm，宽为 12 cm 的矩形纸片，最多能剪出________张.

4. 已知 Rt$\triangle ABC$，斜边 $AB=13$ cm，以直线 BC 为轴旋转一周，得到一个侧面积为 $65\pi\text{cm}^2$ 的圆锥，则这个圆锥的高等于________.

5. 直线 L 同侧有 A，B，C 三点，若过 A，B 的直线 L_1 和过 B，C 的直线 L_2 都与 L

平行，则 A，B，C 三点________，理论根据是____.

6. 若三角形三个内角 $\angle A:\angle B:\angle C=3:4:5$，则 $\triangle ABC$ 是________三角形.

7. 如图 4-70 所示，在梯形 $ABCD$ 中，$AB/\!/CD$，E 为 BC 的中点，设 $\triangle DEA$ 的面积为 S_1，梯形 $ABCD$ 的面积为 S_2，则 S_1 与 S_2 的关系为________.

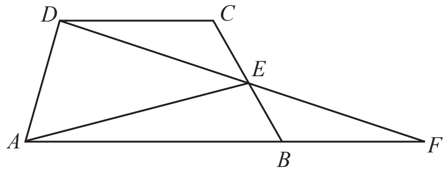


图 4-70

8. 已知 $\triangle ABC\backsim\triangle DEF$，相似比为 $\frac{1}{2}$，则周长比为________，面积比为________.

二、选择题

1. 把三角形分成面积相等的两个三角形的线段是这个三角形的(　　).

A. 角平分线　　B. 中线　　C. 高线　　D. 垂线

2. 如图 4-71，一扇形纸扇完全打开后，外侧两竹条 AB，AC 的夹角为 $120°$，AB 长为 30 cm，贴纸部分 BD 长为 20 cm，贴纸部分的面积为(　　).

A. $800\pi\ \text{cm}^2$　　B. $500\pi\ \text{cm}^2$

C. $\frac{800}{3}\pi\ \text{cm}^2$；　　D. $\frac{500}{3}\pi\ \text{cm}^2$

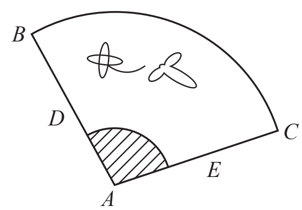


图 4-71

3. 装饰大世界出售下列形状的地砖：①正方形；②长方形；③正五边形；④正六边形. 若只选购其中某一种地砖镶嵌地面，可供选用的地砖有(　　).

A. ①②③　　B. ①②④　　C. ②③④　　D. ①③④

4. 在周长为 40 cm 的梯形 $ABCD$ 中，$AD/\!/BC$，$AE/\!/DC$ 交 BC 于 E，$AD=5$ cm，则 $\triangle ABE$ 的周长是(　　).

A. 40 cm　　B. 30 cm　　C. 20 cm　　D. 15 cm

5. 如果圆锥的母线长为 5 cm，底面半径为 3 cm，那么圆锥的表面积为(　　).

A. $39\pi\ \text{cm}^2$　　B. $30\pi\ \text{cm}^2$　　C. $24\pi\ \text{cm}^2$　　D. $15\pi\ \text{cm}^2$

6. 一条直线把正方形分成相等的两部分，这样的直线有(　　).

A. 2 条　　B. 4 条　　C. 6 条　　D. 无数条

7. 如图 4-72 中，正方形的边长都相等，其中阴影部分面积相等的有(　　).

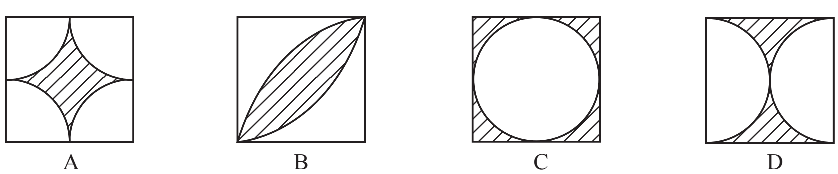


图 4-72

8. 如图 4-73，AB 为半圆 O 的直径，C 是半圆上一点，且 $\angle COA=60^\circ$，设扇形 AOC，$\triangle COB$，弓形 BmC 的面积为 S_1，S_2，S_3，则它们之间的关系是(　　).

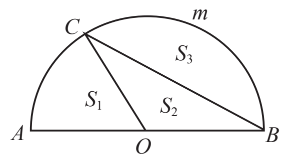


图 4-73

A. $S_1<S_2<S_3$　　B. $S_2<S_1<S_3$

C. $S_1<S_3<S_2$　　D. $S_3<S_2<S_1$

三、计算、证明题

1. 如图 4-74，甲乙两地之间修一条公路，从甲地测得公路的走向是北偏东 55°，若甲乙两地同时开工，那么在乙地走向为多少度时才能使公路准确接通？

2. 如图 4-75，在不规则钢板 $ABCD$ 中，已知 $AD\perp DC$，$BC\perp AB$，AE 平分 $\angle BAD$，CF 平分 $\angle DCB$，AE 交 CD 于 E，CF 交 AB 于 F，试判断 AE 与 CF 的位置关系？

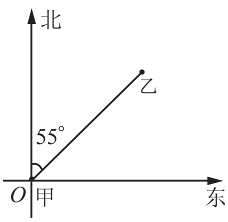


图 4-74

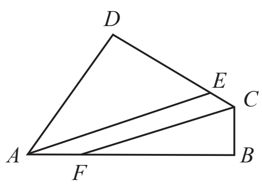


图 4-75

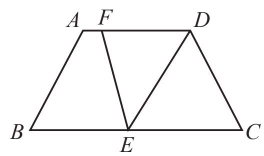


图 4-76

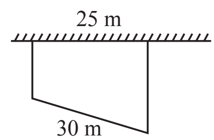


图 4-77

3. 如图 4-76 所示，梯形护坡横截面 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，$AD>CD$，沿过点 D 的直线折叠，使点 C 落在 AD 上的 F 处，折痕 DE 交 BC 于点 E，连接 FE.

(1)求证：四边形 $CDFE$ 是菱形.

(2)若 $BC=CD+AD$，试判断四边形 $ABED$ 的形状，并证明.

4. 万大伯家用 65 m 长的竹篱笆在一块靠墙的空地上围了一个花圃(图 4-77)，这个花圃的面积是多少平方米？

5. 图 4-78 中，阴影部分的面积是 15 cm^2，图中环形的面积是多少平方厘米.（π 取近似值 3）

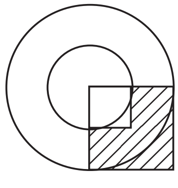


图 4-78

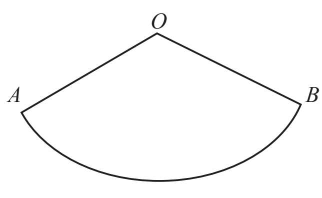


图 4-79

6. 铅球比赛要求运动员在一固定圆圈内投掷，推出的铅球必须落在 40° 角的扇形区域内(以投掷圈的中心为圆心). 如果运动员最多可投 7 m，那么这一比赛的安全区域的面积至少应是多少？(结果精确到 0.1 m^2)

7. 现有一张长 53 cm，宽 28 cm 的矩形木料，要从中剪出长 15 cm，宽 12 cm 的矩形小木块，则最多能剪出多少块？

8. 现有总长为 8 m 的建筑材料，用这些建筑材料围成一个扇形的花坛(图 4-79)，当这个扇形的半径为多少时，可以使这个扇形花坛的面积最大？并求最大面积.

模块 5　解直角三角形

在解决某些实际问题时，我们通常要将千变万化的具体问题转化为数学问题来解决，具体地说，需要我们善于将某些实际问题中的数量关系归结为直角三角形中的元素(边、角)之间的关系，这样就可运用解直角三角形的方法解决实际问题了.

想一想

1. 如图 5-1 所示，要想使人安全地攀上斜靠在墙面上的梯子的顶端，根据实践经验，梯子与地面所成的角 α 一般要满足$50^\circ \leqslant \alpha \leqslant 70^\circ$. 现有一个长 6 m 的梯子，问：使用这个梯子最高可以安全攀上多高的平房?(精确到 0.1 m)

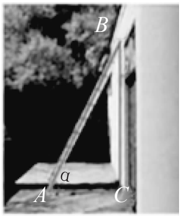


图 5-1

易见：角 α 越大攀上的高度就越高。这个问题归结为：在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，已知$\angle A=70^\circ$，斜边 $AB=6$ m，求 BC 的长？

2. 为了搞好防洪工程建设，需要测量黄河某段的宽度，如图 5-2(1)中，一测量员在河岸的 A 处测得对岸岸边的一个标记 B 在它的正北方向，测量员从 A 点开始沿岸边向正东方向行进了 150 m 到达点 C 处，这时测得标记 B 在北偏西 30°的方向. 结合直角三角形的相关知识即可求出这段河的宽度.

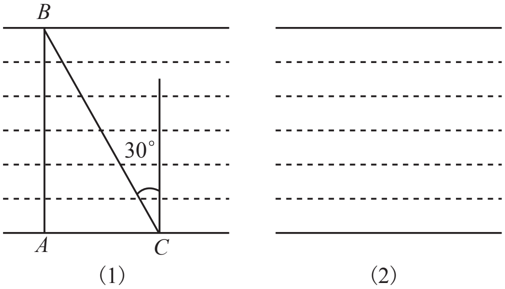


图 5-2

为了解决以上问题，我们来学习有关解直角三角形的知识.

5.1 勾股定理

直角三角形是特殊的三角形，其中一个角是直角，两个锐角具有互余的关系．那么，直角三角形的三边具有什么关系呢？

想一想

(1)作一个直角三角形 $ABC(\angle C=90°)$，量一量两条直角边，斜边的长度；改变直角边或斜边的长度，再量一量．多进行几次，观察这些直角三角形三边之间的关系，你能发现什么规律呢？

(2)如图 5-3 所示，观察图中的阴影部分，它们的面积具有什么关系呢？

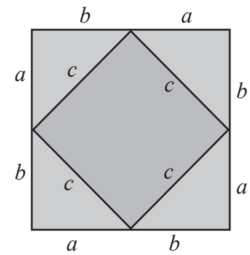


图 5-3

显然可以看出：$S_{大正方形}=(a+b)^2=4$ 个 $S_{三角形}+S_{正方形}=\frac{1}{2}ab\times 4+c^2$，即 $(a+b)^2=\frac{1}{2}ab\times 4+c^2$，所以 $a^2+b^2=c^2$，这说明，图中直角三角形的两直角边的平方和等于斜边的平方．

由以上两例说明“直角三角形的两直角边的平方和等于斜边的平方”该结论带有普遍性．

记一记

勾股定理：直角三角形两直角边的平方和等于斜边的平方．

勾股定理揭示了直角三角形三边之间的关系．

做一做

如图 5-4 所示，将长为 5.41 m 的梯子 AB 斜靠在墙上，梯子下端到墙角的垂直距离 AC 长为 2.16 m，求梯子上端 B 到墙的底端 C 的距离 BC．(精确到 0.01 m)

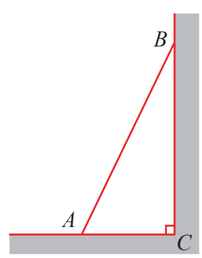


图 5-4

解：梯子的长 AB 与 BC 及 AC 构成了直角三角形，根据勾股定理的结论：$AC^2+BC^2=AB^2$，

$\therefore BC^2=AB^2-AC^2=5.41^2-2.16^2=24.6025$，

$\therefore BC\approx 4.96(\text{m})$．

议一议

一个门框，宽 1 m，高 2 m，有一块长 3 m，宽 2.2 m 的薄木板能否从门框内通过？为什么？

解：图 5-5 是门框的简图，连接 AC，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle B=90°$，根据勾股定理，

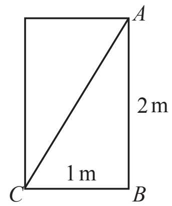


图 5-5

得　$AC^2=AB^2+BC^2=1^2+2^2=5$，

$\therefore AC\approx 2.236$ m.

因为 2.236 m＞2.2 m，所以该木板可以通过.

练一练

1. 如图 5-6 所示，为了求出湖两岸 A，B 的两点之间的距离，一个观测者在点 C 处设桩，使三角形恰好为直角三角形，通过测量，得到 AC 长 160 m，BC 长 128 m. 问从 A 点穿过湖到点 B 有多远？

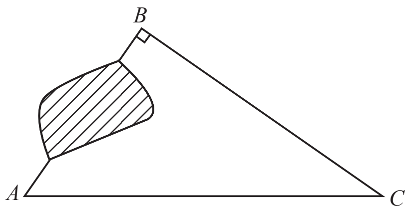


图 5-6

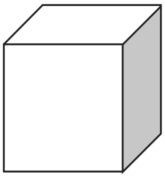


图 5-7

2. 如图 5-7 所示，能否将一根 70 cm 长的细木棒放入长、宽、高分别为 40 cm，30 cm 和 50 cm 的长方体盒子中？

5.2 锐角的三角函数

想一想

如图 5-8 所示，秋千链子的长度为 3 m，静止时的秋千踏板(大小忽略不计)距地面 0.5 m. 秋千向两边摆动时，若最大摆角(摆角指秋千链子与铅垂线的夹角)约为 53°，则秋千踏板与地面的最大距离约为多少?

要解决类似问题需要掌握锐角三角函数的相关知识.

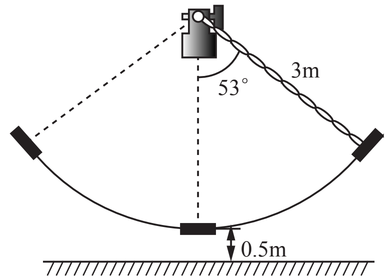


图 5-8

5.2.1 直角三角形边角关系的名称

记一记

直角三角形 ABC 可以简记为 Rt$\triangle ABC$，如图 5-9 所示，规定：$\angle C$ 所对的边 AB 称为斜边，用 c 表示，另两条直角边分别为$\angle A$ 的对边与邻边，用 a，b 表示.

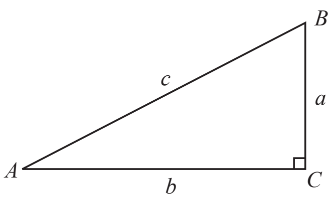


图 5-9

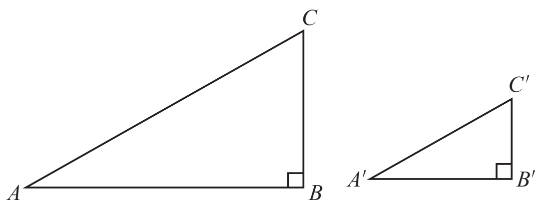


图 5-10

议一议

如图 5-10 所示，$\triangle ABC$ 和$\triangle A'B'C'$中，若$\angle B=\angle B'=\angle 90°$，$\angle A=\angle A'$，那么$\triangle ABC$ 和$\triangle A'B'C'$相似吗? $\dfrac{BC}{AB}$和$\dfrac{B'C'}{A'B'}$相等吗?

5.2.2 锐角的三角函数的概念

记一记

Rt$\triangle ABC$ 中，如图 5-9，$\angle C=90°$，设 $AB=c$，$AC=b$，$BC=a$.

①$\angle A$ 的对边与斜边的比值是$\angle A$ 的正弦，记作 $\sin A=\dfrac{\angle A\text{ 的对边}}{\text{斜边}}=\dfrac{a}{c}$;

②$\angle A$ 的邻边与斜边的比值是$\angle A$ 的余弦，记作 $\cos A=\dfrac{\angle A\text{ 的邻边}}{\text{斜边}}=\dfrac{b}{c}$;

③$\angle A$ 的对边与邻边的比值是$\angle A$ 的正切，记作 $\tan A=\dfrac{\angle A\text{ 的对边}}{\angle A\text{ 的邻边}}=\dfrac{a}{b}$;

④$\angle A$ 的邻边与对边的比值是$\angle A$ 的余切，记作 $\cot A=\dfrac{\angle A\text{ 的邻边}}{\angle A\text{ 的对边}}=\dfrac{b}{a}$.

在直角三角形中，当锐角一定时，它的对边与斜边、邻边与斜边、对边与邻边、邻边与对边的比值是固定的，这几个比值称为锐角的三角函数，它反映的是两条线段的比值，对于三角函数的概念，同学们必须深刻理解后再记忆，不要混淆.

想一想

在 Rt△ABC 中，$\angle B$ 的正弦、余弦、正切、余切是哪一边与哪一边的比值呢？

议一议

锐角三角函数都是正实数吗？为什么？

做一做

已知 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$a:b=3:2$，$c=13$，求$\angle A$，$\angle B$ 的四个三角函数值.

解：设 $a=3k$，则 $b=2k$，

∵△ABC 为直角三角形，根据勾股定理得：$c^2=a^2+b^2$，

∴$13^2=9k^2+4k^2$，则 $13k^2=13^2$，∴$k^2=13$，∴$k=\sqrt{13}$，

∴$a=3\sqrt{13}$，$b=2\sqrt{13}$.

$\sin A=\dfrac{\angle A\text{ 的对边}}{\text{斜边}}=\dfrac{a}{c}=\dfrac{3\sqrt{13}}{13}=\cos B$；$\cos A=\dfrac{\angle A\text{ 的邻边}}{\text{斜边}}=\dfrac{b}{c}=\dfrac{2\sqrt{13}}{13}=\sin B$；

$\tan A=\dfrac{\angle A\text{ 的对边}}{\angle A\text{ 的邻边}}=\dfrac{a}{b}=\dfrac{3}{2}=\cot B$；$\cot A=\dfrac{\angle A\text{ 的邻边}}{\angle A\text{ 的对边}}=\dfrac{b}{a}=\dfrac{2}{3}=\tan B$.

练一练

1. Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$\angle B=60°$，两直角边的和为 14，求这个直角三角形的面积.

2. 如图 5-11 所示，$AC\perp BC$，$\cos\angle ADC=\dfrac{4}{5}$，$\angle B=30°$，$AD=10$，求 BD 的长.

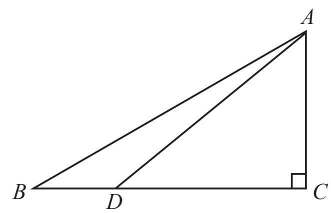


图 5-11

5.2.3 特殊角的三角函数

想一想

如图 5-12 所示，这是一块三角形草皮，$\angle A=30°$，$AB=2$ m，$AC=1.8$ m，那么这块三角形的草皮面积为多少呢？

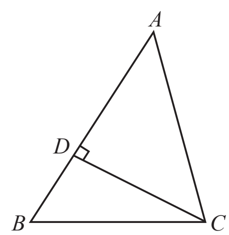


图 5-12

分析：过 C 点作 AB 的垂线 CD，垂足为 D，我们知道，$\dfrac{CD}{AC}=\sin A$，从而 $CD=AC\sin 30°$，AC 是已知的，假如 $\sin 30°$能够知道，那么 CD 就可求，这个问题就得到解决.

做一做

30°的三角函数值是多少？

请每位同学画一个含有30°的角的直角三角形，而后用刻度尺量出它的对边和斜边，计算$\sin 30^\circ$的值，并与同伴交流，看看这个值是多少.

通过测量计算，可以得到$\sin 30^\circ=\dfrac{\text{对边}}{\text{斜边}}=\dfrac{1}{2}$.

这与平面图形中的结论“在直角三角形中，如果一个锐角等于30°，那么它所对的直角边等于斜边的一半”一致. $\text{Rt}\triangle ABC$中，$c=2a$，由勾股定理得到$b^2=c^2-a^2=(2a)^2-a^2=3a^2$.

所以$\cos 30^\circ=\dfrac{b}{c}=\dfrac{\sqrt{3}a}{2a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\tan 30^\circ=\dfrac{a}{b}=\dfrac{a}{\sqrt{3}a}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\cot 30^\circ=\dfrac{b}{a}=\dfrac{\sqrt{3}a}{a}=\sqrt{3}$.

议一议

45°，60°角的四个三角函数值怎么推出呢？

记一记

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$
30°	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

练一练

1. 计算：

(1)$\sin 30^\circ+\cos 45^\circ-(\cot 60^\circ-1)+\tan 37^\circ\cot 37^\circ$；

(2)$\cos 45^\circ+\tan 60^\circ-\sin 30^\circ-\cos 30^\circ\tan 45^\circ-3\cot 60^\circ$；

(3)已知：$\cos(\alpha+28^\circ)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，求$\alpha$的度数.

2. $\text{Rt}\triangle ABC$中，$\angle C=90^\circ$，$\angle A=30^\circ$，$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$所对的边为a，b，c，则$a:b:c=$(　　).

A. $1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$　　B. $1:\sqrt{3}:\sqrt{2}$　　C. $1:\sqrt{3}:2$　　D. $1:2:\sqrt{3}$

3. 在$\triangle ABC$中，$\angle C=90^\circ$，$AC=2.1$ cm，$BC=2.8$ cm. 求：(1)$\triangle ABC$的面积；(2)斜边的长；(3)高CD.

4. $\text{Rt}\triangle ABC$中，$\angle C=90^\circ$，$AC=8$，$\angle A$的平分线$AD=\dfrac{16\sqrt{3}}{2}$，求$\angle B$的度数以及边BC，AB的长.

5.2.4 用计算器求任意锐角的三角函数值

议一议

小明放一个线长为 125 m 的风筝，当他的风筝线与水平地面构成65°的角时(图 5-13)，他的风筝距离地面有多高?(精确到 1 m)

前面，我们学习了30°，45°，60°的三角函数值，这个问题中的锐角 B 不是这些特殊角，怎样得到它的三角函数值呢?这个问题是否能得到解决呢?

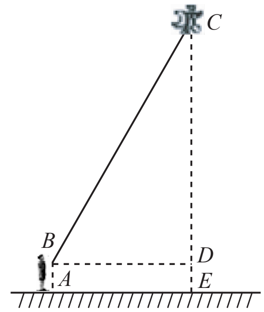


图 5-13

想一想

1. 已知锐角的大小，如何求该角的三角函数值?
2. 已知锐角的三角函数值，如何求该锐角?

做一做

用计算器求锐角的三角函数值.

1. 求 sin 63°52′41″的值(精确到 0.000 1)

解：先用如下方法将角度单位状态设定为“度”：$\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{1}$显示$\boxed{\text{D}}$；

再按下列顺序依次按键：

$\boxed{\sin}$ $\boxed{63}$ $\boxed{°\,'\,''}$ $\boxed{52}$ $\boxed{°\,'\,''}$ $\boxed{41}$$\boxed{°\,'\,''}$ $\boxed{=}$

显示结果为 0.897 859 012.

所以 sin 63°52′41″≈0.897 9.

2. 求 cot 70°45′的值.(精确到 0.000 1)

解：在角度单位状态为“度”的情况下，屏幕显示出$\boxed{\text{D}}$，按下列顺序依次按键：

$\boxed{1}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{\tan}$ $\boxed{70}$ $\boxed{°\,'\,''}$ $\boxed{45}$ $\boxed{°\,'\,''}$ $\boxed{=}$，显示结果为 0.349 215 633.

所以 cot 70°45′≈0.349 2.

已知锐角三角函数值，使用计算器求相应的锐角.

3. 已知 sin A=0.501 8；用计算器求锐角 A 可以按照下面方法操作：

第一种方法：

第一步：按计算器$\boxed{\text{2nd F}}$ $\boxed{\sin}$键；

第二步：然后输入函数值 0.501 8.

屏幕显示答案：30.119 158 67°.(按实际需要进行精确)

还可以利用$\boxed{\text{2nd F}}$ $\boxed{°\,'\,''}$键，进一步得到∠A=30°07′08.97″.

第二种方法：

第一步：按计算器$\boxed{\text{2nd F}}$ $\boxed{°\,'\,''}$键；

第二步：输入 0.501 8.

屏幕显示答案：30°07′08.97″(这说明锐角 A 精确到 1′的结果为 30°7′，精确到 1″的结果为 30°7′9″)

4. 已知 tan x＝0.741 0，求锐角 x.（精确到 1′）

解：在角度单位状态为“度”的情况下，屏幕显示出 $\boxed{\text{D}}$ 按下列顺序依次按键：

$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\tan^{-1}}$ $\boxed{0}$ $\boxed{\cdot}$ $\boxed{7}$ $\boxed{4}$ $\boxed{1}$ $\boxed{0}$ $\boxed{=}$，显示结果为 36.538 445 77. 再按键：

$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{{}^{\circ}{}'{}''}$，显示结果为 36°32′18.4″.

所以，x≈36°32′.

练一练

1. 求 sin 63°52′41″的值(精确到 0.000 1).

2. 已知 tan x＝0.741 0，求出锐角 x 的值(精确到 1′).

3. 已知 cot x＝0.195 0，求出锐角 x 的值(精确到 1′).

4. 如图 5-14，施工队准备在一段斜坡上铺上台阶方便通行. 现测得斜坡上铅垂的两棵树间水平距离 AB＝4 m，斜面距离 BC＝4.25 m，斜坡总长 DE＝85 m.

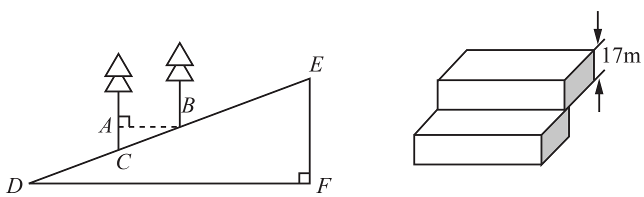


图 5-14

(1)求坡角∠D 的度数(结果精确到 1°)；

(2)若这段斜坡用厚度为 17 cm 的长方体台阶来铺，需要铺几级台阶？

5.3 直角三角形在实际中的应用

5.3.1 仰角、俯角及有关实际问题

记一记

仰角、俯角的定义

如图 5-15 所示，从下往上看，视线与水平线的夹角叫仰角，从上往下看，视线与水平线的夹角叫作俯角.

在实际生活中，解直角三角形有着广泛的应用，例如我们通常遇到的视线、水平线、铅垂线就构成了直角三角形.

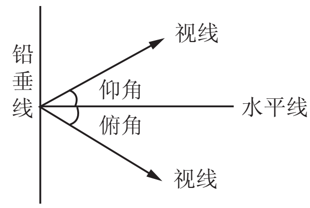


图 5-15

想一想

如图 5-16 所示的电线杆 AB，在离电线杆 22.7 m 的 C 处，用 1.20 m 的测角仪 CD 测得电线杆顶端 B 的仰角 $\alpha=22°$，能求出电线杆 AB 的高度吗？

分析：因为 $AB=AE+BE$，$AE=CD=1.20$ m，所以只要求出 BE 的长度，问题就得到解决，在$\triangle BDE$ 中，已知 $DE=CA=22.7$ m，$\angle BDE=22°$，那么 $BE=DE\tan\angle BDE=22.7\tan 22°$. 显然用角的正切或余切都能解决这个问题.

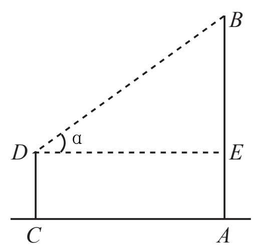


图 5-16

做一做

1. 某学校的同学们在五一期间去双塔寺观赏牡丹，同时对文宣塔的高度进行了测量. 如图 5-17 所示，他们先在 A 处测得塔顶 C 的仰角为$30°$；再向塔的方向直行 80 步到达 B 处，又测得塔顶 C 的仰角为$60°$. 请用以上数据计算塔高.（学生的身高忽略不计，1 步$=0.8$ m，结果精确到 1 m）

解：过点 C 作 $CD\perp AB$ 于点 D，

则$\angle CDA=90°$，$\angle A=30°$，$\angle CBD=60°$.

$\because \angle CBD=\angle A+\angle ACB$，

$\therefore \angle A=\angle ACB=30°$.

$\because AB=80$ 步，1 步$=0.8$ m，

$\therefore BC=AB=80$(步)$=80\times 0.8$ (m)$=64$ (m).

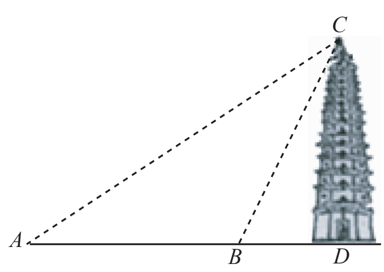


图 5-17

在 Rt$\triangle CDB$ 中，$CD=BC\times\sin\angle CBD=64\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\approx 55$ (m).

答：文宣塔高约 55 m.

2. 如图 5-18 所示，甲、乙是两幢地平高度相等、隔岸相望的建筑物. 由于某种原因不能到达乙楼. 为测量乙楼的高度，只能充分利用甲楼的空间，甲楼的各层都可到达且能看见乙楼.

现仅有测量工具为皮尺和测角器(皮尺可用于测量长度，测角器可以测量仰角、俯角或两视线的夹角).

(1)你设计一个测量乙楼高度的方法，要求写出测量步骤和必需的测量数据(用字母表示)，并画出测量图形.

(2)用你测量的数据(用字母表示)写出计算乙楼高度的表达式.

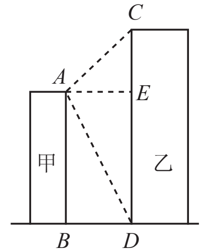


图 5-18

分析：如图 5-18 所示，由于甲楼的各层都能到达，所以甲楼的高度可以测量，我们不妨站在甲楼的顶层测乙楼的顶端的仰角，再测乙楼的底端的俯角，这样在 Rt△ABD 中就可以求出 BD 的长度，因为$AE=BD$，而后在 Rt△ACE 中求得 CE 的长度，这样 CD 的长度就可以求出.

【想一想】是否还能用其他的方法测量出乙楼的高度.

练一练

1. 在山脚 C 处测得山顶 A 的仰角为 45°(图 5-19). 沿着水平地面向前 300 m 到达 D 点，在 D 点测得山顶 A 的仰角为 60°，求山高 AB.

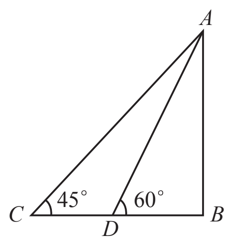


图 5-19

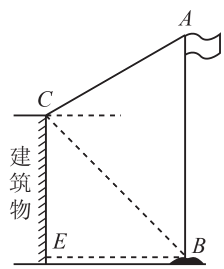


图 5-20

2. 如图 5-20 所示，张华同学在学校某建筑物的 C 点处测得旗杆顶部 A 点的仰角为 30°，旗杆底部 B 点的俯角为45°. 若旗杆底部 B 点到建筑物的水平距离 $BE=9$ m，旗杆台阶高 1 m，则旗杆顶点 A 离地面的高度为多少 m?(结果保留根号).

5.3.2 坡度、坡角的概念及有关实际问题

议一议

如图 5-21 所示，斜坡 AB 和斜坡 $A'B'$哪一个倾斜程度比较大? 显然，斜坡 $A'B'$的倾斜程度比较大，说明$\angle A'>\angle A$. 从图形可以看出，$\dfrac{B'C'}{A'C'}>\dfrac{BC}{AC}$，即 $\tan A'>\tan A$.

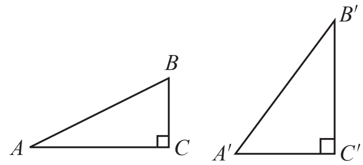


图 5-21

在修路、挖河、开渠和筑坝时，设计图样上都要注明

斜坡的倾斜程度.

记一记

如图 5-22 所示，这是一张水库拦水坝的横断面的设计图，坡面的铅垂高度与水平宽度的比叫作坡度(或坡比)，记作 i，即 $i=\frac{AC}{BC}$，坡度通常用 $1:m$ 的形式表示，例如图中的 $1:2$ 的形式. 坡面与水平面的夹角叫作坡角. 从三角函数的概念可以知道，坡度与坡角的关系是 $i=\tan B$，显然，坡度越大，坡角越大，坡面就越陡.

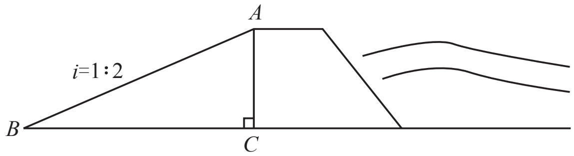


图 5-22

做一做

如图 5-23 所示，一段路基的横断面是梯形，高为 4.2 m，上底的宽是 12.51 m，路基的坡面与地面的倾角分别是 32°和 28°，求路基下底的宽. (精确到 0.1 m)

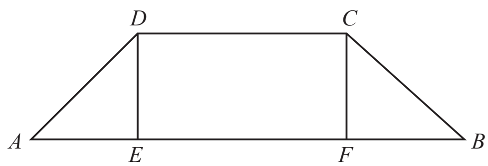


图 5-23

分析： 四边形 $ABCD$ 是梯形，通常的辅助线是过上底的两个顶点引下底的垂线，这样，就把梯形分割成直角三角形和矩形，从题目来看，下底 $AB=AE+EF+FB$，$EF=CD=12.51$ m. AE 在直角三角形 AED 中求得，而 FB 可以在直角三角形 BFC 中求得，问题得到解决.

解： (略).

练一练

1. 在山脚 C 处测得山顶 A 的仰角为 45°. 如图 5-24 所示，沿着坡角为 30°的斜坡前进 300 m 到达点 D，在点 D 测得山顶 A 的仰角为 60°，求山高 AB.

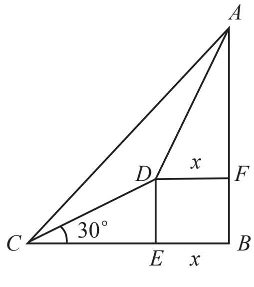


图 5-24

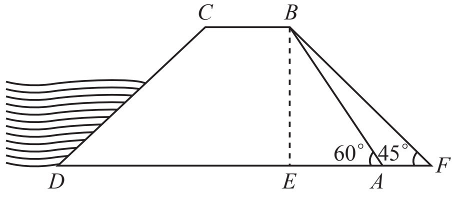


图 5-25

2. 如图 5-25 所示，水坝的横断面是梯形，背水坡 AB 的坡角 $\angle BAD=60°$，坡长 $AB=20\sqrt{3}$ m，为加强水坝强度，将坝底从 A 处向后水平延伸到 F 处，使新的背水坡的坡角 $\angle F=45°$，求 AF 的长度(结果精确到 1 m，$\sqrt{2}\approx1.414$，$\sqrt{3}\approx1.732$).

5.3.3 方位角及有关实际问题

记一记

以正北、正南方向为基准描述物体的运动方向的角，叫方位角(方向角)，如图 5-26 所示，OA，OB，OC，OD 的方位角分别表示北偏东 60°，北偏西 30°，南偏西 45°，南偏东 20°.

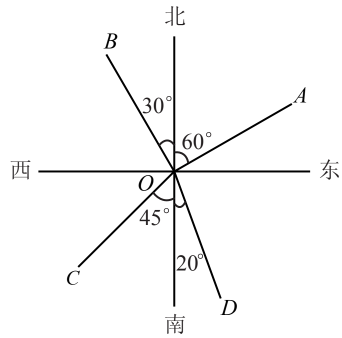


图 5-26

北偏东 45°，通常叫东北方向；北偏西 45°，通常叫西北方向；南偏东 45°，通常叫东南方向；南偏西 45°，通常叫西南方向.

方位角(方向角)在航行、测绘等实际生活中应用十分广泛.

做一做

1. 如图 5-27 所示，在 O 处测得北偏东 30°方向的小岛 A 处有一暗礁区，为避开这一危险区，轮船在 O 处应改为向东北方向航行才能避开这一危险区.

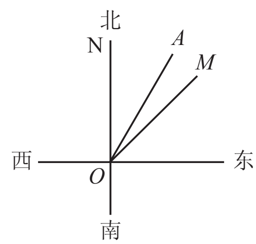


图 5-27

(1)在图中画出轮船的航线；

(2)求出轮船航线与 OA 的夹角.

分析：在方位图中，以南北方向为主方向，叙述时常叙述为南偏东、南偏西、北偏东、北偏西等，轮船向东北方向航行，即是向北偏东 45°的方向航行，故只有以 ON 为始边，沿顺时针方向上作 $\angle MON=45°$ 即可.

解：(略).

2. 如图 5-28 所示，海船以 29.8 n mile/h 的速度向正北方向航行，在 A 处看灯塔 C 在海船的北偏东32°处，半小时后航行到点 B 处，发现此时灯塔 C 与海船的距离最短.

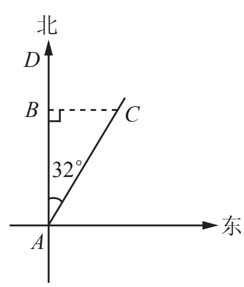


图 5-28

(1)在图上标出点 B 的位置；

(2)求灯塔 C 到 B 处的距离(精确到 0.1 n mile).

解：(1)如图 5-28 所示，作 $CB\perp AD$，垂足为 B；

(2)在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$AB=29.8\times0.5=14.9$，

$BC=AB\tan 32°=14.9\times\tan 32°\approx9.3$，

答：灯塔 C 到 B 处的距离为 9.3 海里.

【小结】明确观测点是解决这类问题的关键，再由观测点确定被观测对象的位置.

练一练

1.(1)指出如图 5-29(1)所示 OA，OB 所处的方向；(2)画出射线 OC，使射线 OC 在北偏西 $45°$.

分析：方位角通常以正南、正北为基准，通过方位角确定方向时，一般以第一个方向作为角的始边，第二个方向作为旋转的方向，旋转相应的角度就可以确定方向.

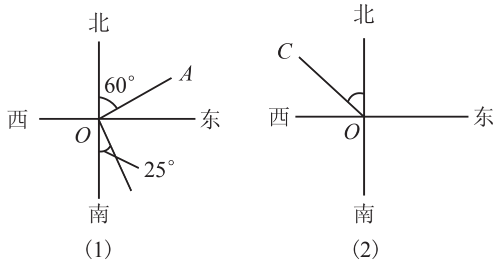


图 5-29

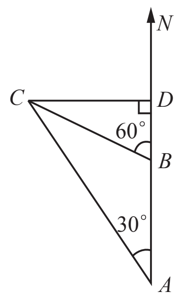


图 5-30

2. 如图 5-30 所示，一艘货船以 30 km/h 的速度向正北航行，在 A 处看见灯塔 C 在船的北偏西 $30°$，20 min 后货船行至 B 处，看见灯塔 C 在船的北偏西 $60°$，若货船向北继续航行，当灯塔 C 在船的正西方向时，灯塔与货船相距多少千米？

趣味数学

正方形与直角三角形“联姻”

今天是一个好日子，正方形与直角三角形“联姻”了. 不相信？看吧，图 5-31 是一种羊头形图案. 它就是正方形与直角三角形“联姻”的结晶. 你想知道它是怎么做出来的吗？

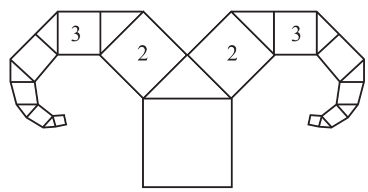


图 5-31

从正方形 1 开始，以它的一边为斜边，向外作等腰直角三角形，然后再以它的直角边为边，分别向外作正方形 2 和 2′，……依次类推. 怎么样，你是不是得到了下面这美妙的图案.

它们在“联姻”后还会有一些问题来考你呢？若正方形 1 的边长为 64 cm，你知道正方形 7 的边长怎样求吗？

聪明的你，一定还会将正方形与直角三角形“联姻”出更美妙的图案吧？相信自己，动手试一试！

综合练习

一、填空题

1. 课外活动小组测量学校旗杆的高度. 当太阳光线与地面成 30°角时(图 5-32)，测得旗杆 AB 在地面上的投影 BC 长为 24 m，则旗杆 AB 的高度约是______ m.（结果保留 3 个有效数字，$\sqrt{3}\approx1.732$）

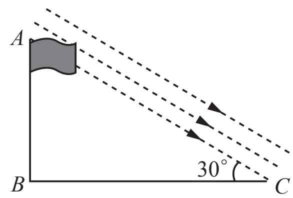


图 5-32

2. 已知等腰三角形的周长为 20，某一内角的余弦值为 $\frac{2}{3}$，那么该等腰三角形的腰长等于________.

3. 升旗时某同学站在离旗杆底部 21 m 处行注目礼，当国旗升到旗杆顶端时，该同学看国旗的仰角是 30°，若其双眼离地面 1.60 m，则旗杆高度为________ m(结果保留根号).

4. 如图 5-33 所示，某车间的人字屋架为等腰三角形，跨度 $AB=14$ m，CD 为中柱，则上弦 AC 的长是________ m.（用$\angle A$ 的三角函数表示）

5. 如图 5-34 所示，在高为 2 m，水平距离为 3 m 楼梯的表面铺地毯，地毯的长度至少需________米.

6. 如图 5-35 所示，在倾斜角为 30°的山坡上种树，要求相邻两棵树间的水平距离为 3 m，那么，相邻两棵树间的斜坡距离为________ m.

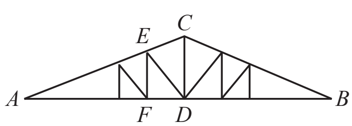


图 5-33

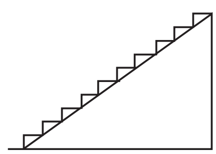


图 5-34

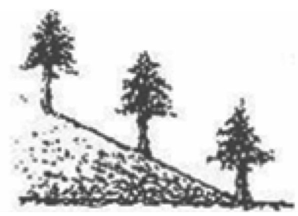


图 5-35

二、选择题

1. 在$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，如果各边长度都缩小 2 倍，则锐角 A 的正切值和余切值(　　).

A. 都缩小 2 倍　　B. 都扩大 2 倍　　C. 都没有变化　　D. 不能确定

2. 在$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，如果 $AB=2$，$BC=1$，那么 $\sin A$ 的值是(　　).

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. 在$\triangle ABC$ 中，已知 $AC=3$，$BC=4$，$AB=5$，那么下列结论成立的是(　　).

A. $\sin A=\frac{5}{4}$　　B. $\cos A=\frac{3}{5}$　　C. $\tan A=\frac{3}{4}$　　D. $\cot A=\frac{4}{5}$

4. 在离旗杆 20 m 处的地方，用测角仪测得旗杆顶的仰角为 α，如测角仪的高为 1.5 m，那么旗杆的高为(　　)m.

A. $20\cot\alpha$　　B. $20\tan\alpha$　　C. $1.5+20\tan\alpha$　　D. $1.5+20\cot\alpha$

5. 已知$\triangle ABC$中，$\angle B=60^\circ$，$AB=6$，$BC=8$，则$\triangle ABC$的面积是(　　).

A. $12\sqrt{3}$　　B. 12　　C. $24\sqrt{3}$　　D. $12\sqrt{2}$

6. $\triangle ABC$中，$\cos A=\frac{1}{2}$，$\cot B=1$，则$\triangle ABC$的形状是(　　).

A. 锐角三角形　　B. 钝角三角形

C. 直角三角形　　D. 等腰三角形

7. 若$\angle A$是锐角，且$\sin A=\cos A$，则$\angle A$的度数是(　　).

A. 30°　　B. 45°　　C. 60°　　D. 90°

8. 如图 5-36 所示，一棵大树在一次强台风中于离地面 5 m 处折断倒下，倒下部分与地面成 30° 夹角，这棵大树在折断前的高度为(　　).

A. 10 m　　B. 15 m　　C. 25 m　　D. 30 m

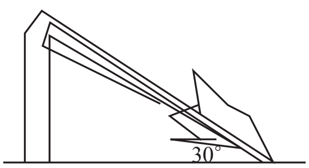


图 5-36

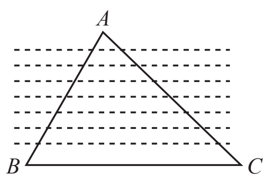


图 5-37

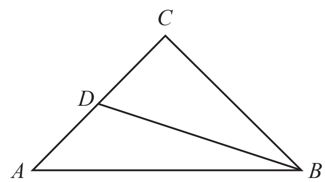


图 5-38

9. 如图 5-37 所示，为了测量河流某一段的宽度，在河北岸选了一点 A，在河南岸选相距 200 m 的 B，C 两点，分别测得$\angle ABC=60^\circ$，$\angle ACB=45^\circ$，则这段河的宽度为(　　).

A. $100\sqrt{2}$　　B. $100\sqrt{3}$　　C. $100(3-\sqrt{3})$　　D. $100(3+\sqrt{3})$

10. 如 5-38 所示，在等腰直角三角形 ABC 中，$\angle C=90^\circ$，$AC=6$，D 是 AC 上一点，若$\tan\angle DBA=\frac{1}{5}$，则 AD 的长为(　　).

A. $\sqrt{2}$　　B. 2　　C. 1　　D. $2\sqrt{2}$

三、解答题

1. 为美化环境，计划在某小区内用 30 m^2 的草皮铺设一块边长为 10 m 的等腰三角形绿地，请你求出这个等腰三角形绿地的另两边长.

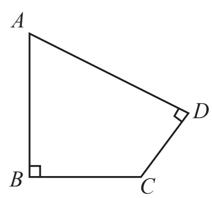


图 5-39

2. 某片绿地的形状如图 5-39 所示，其中$\angle A=60^\circ$，$AB\perp BC$，$AD\perp CD$，$AB=200$ m，$CD=100$ m，求 AD，BC 的长.（精确到 1 m，$\sqrt{3}\approx1.732$）

3. 小刚和小强两位同学参加放风筝比赛。当他俩把风筝线的一端

固定在同一水平的地面时，测得一些数据如下表.

同学	放出的线长/m	线与地面所成的角度
小刚	250	45°
小强	200	60°

假设风筝线是拉直的，试比较他俩谁放的风筝较高？高多少 m？（精确到 0.1 m）

4. 如图 5-40 所示，天空中有一个静止的广告气球 C，从地面 A 点测得 C 点的仰角为 45°，从地面 B 点测得 C 点的仰角为 60°. 已知 $AB=20$ m，点 C 和直线 AB 在同一铅垂平面上，求气球离地面的高度。（结果保留根号）

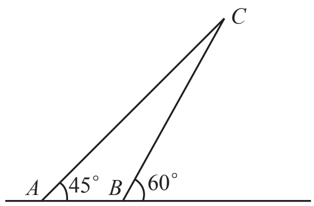


图 5-40

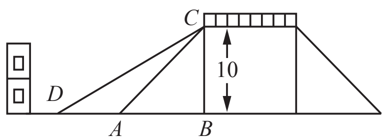


图 5-41

5. 图 5-41 是一座人行天桥的示意图，天桥的高是 10 m，坡面的倾斜角为 45°. 为了方便行人推车过天桥，市政部门决定降低坡度，使新坡面的倾斜角为 30°，若新坡角下需留 3 m 的人行道，问离原坡角 10 m 的建筑物是否需要拆除？（参考数据：$\sqrt{2}\approx1.414$，$\sqrt{3}\approx1.732$）

6. 在数学活动课上，老师带领学生去测河宽，如图 5-42 所示，某学生在点 A 处观测到河对岸水边处有一点 C，并测得 $\angle CAD=45°$，在距离 A 点 30 m 的 B 处测得 $\angle CBD=30°$，求河宽 CD.（结果可带根号）

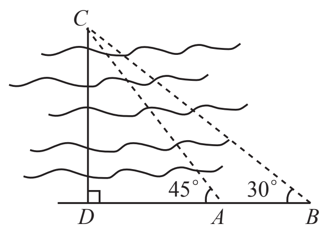


图 5-42

模块 6　投影与视图

6.1　投影

记一记

投影：一般地，用光线照射物体，在某个平面(地面、墙壁等)上得到的影子叫作物体的投影，照射光线叫作投影线，投影所在的平面叫作投影面.

投影分为中心投影和平行投影两种.（如图 6-1）

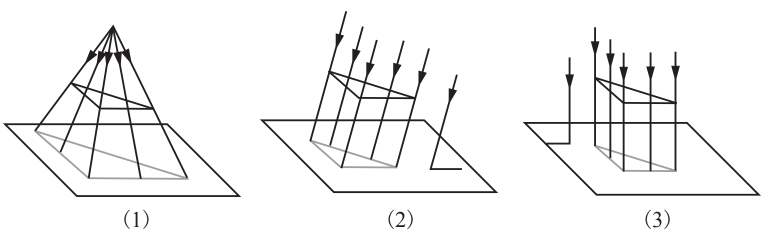


图 6-1

1. 中心投影

光由一点向外散射所形成的投影叫作中心投影，中心投影的投影线必定交于一点.如图 6-1(1)、图 6-2 所示.

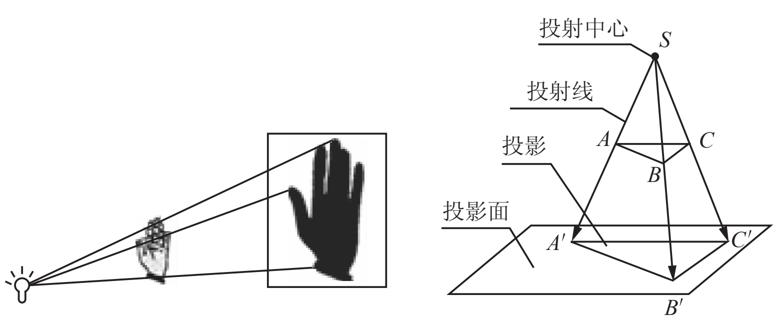


图 6-2

2. 平行投影

物体在平行光线照射下所形成的投影，叫作平行投影，平行投影的投影线相互平行。平行投影按投射方向与投射面是否垂直可分为正投影和斜投影.（图 6-3）

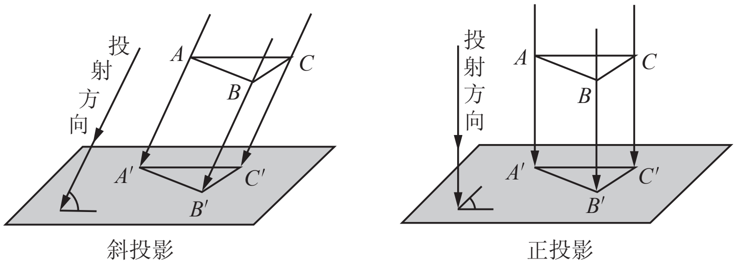


图 6-3　平行投影

(1)正投影：投影线垂直于投影面产生的投影。物体正投影的形状、大小与它相对于投影面的位置和角度有关.

(2)斜投影：投影线不垂直于投影面产生的投影.

中心投影形成的直观图能非常逼真地反映原来的物体，主要运用于绘画领域，因此常用来概括地描绘一个结构或一个产品的外貌，但是由于中心投影的投影中心、投影面和物体的相对位置改变时，直观图(投影)的大小和形状也将发生改变，因此工程制图或技术图样一般不采用中心投影，而采用平行投影的方法.

议一议

判断下列命题是否正确：

(1)直线的平行投影一定为直线.

(2)一个圆在平面上的平行投影可以是圆或椭圆或线段.

(3)矩形的平行投影一定是矩形.

(4)两条相交直线的平行投影可以平行.

6.2 三视图

视图是指将物体按正投影向投影面投射所得到的图形。光线自物体的前面向后投射所得到的投影称为主视图或正视图；自上向下投射所得到的投影称为俯视图；自左向右投射所得到的投影称为左视图.

用这三种视图刻画空间物体的结构，我们就称之为三视图.（图 6-4）

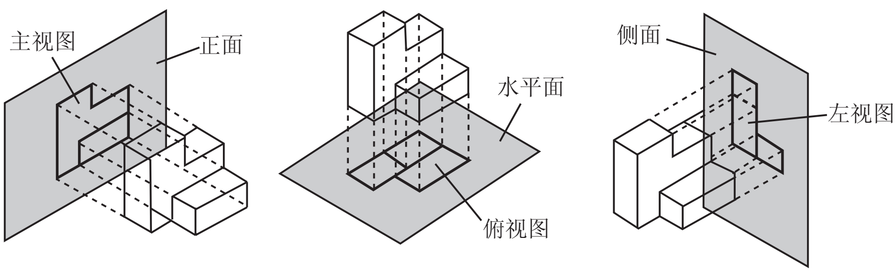


图 6-4

投影规则：主俯长对正、主左高平齐、俯左宽相等.

画三视图时应注意：主视图和俯视图的长要相等；主视图和左视图的高要相等；左视图和俯视图的宽要相等.（图 6-5）

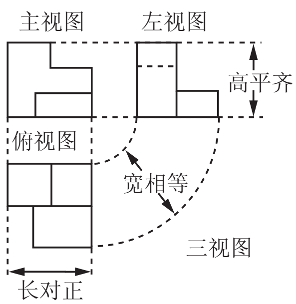


图 6-5

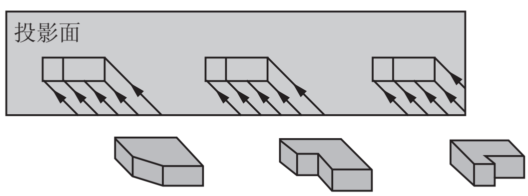


图 6-6

议一议

用一种视图能否正确刻画一个物体的形状和结构呢？

注意：在许多情况下，只用一个投影不加任何注解，是不能完整清晰地表达和确定形体的形状和结构的. 如图 6-6 所示，三个形体在同一个方向的投影完全相同，但三个形体的空间结构却不相同. 可见只用一个方向的投影来表达形体形状是不行的. 一般必须将形体向几个方向投影，才能完整清晰地表达出形体的形状和结构.

6.3　三视图的画法

在画组合体三视图之前，首先运用形体分析法把组合体分解为若干个形体，确定它们的组合形式，判断形体间邻接表面是否处于共面、相切和相交的特殊位置；然后逐个画出形体的三视图；最后对组合体中的垂直面、一般位置面、邻接表面处于共面、相切或相交位置的面、线进行投影分析. 当组合体中出现不完整形体、组合柱或复合形体相贯时，可用恢复原形法进行分析.

三视图画法的具体步骤：

1. 进行形体分析

把组合体分解为若干形体，并确定它们的组合形式，以及相邻表面间的相互位置.

2. 确定主视图

三视图中，主视图是最主要的视图.

确定放置位置：要确定主视投影方向，首先解决放置问题. 选择组合体的位置以自然平稳为原则，并使组合体的表面相对于投影面尽可能多地处于平行或垂直的位置.

确定主视投影方向：选最能反映组合体的形体特征及各个基本体之间的相互位置，并能减少俯、左视图上虚线的那个方向，作为主视图投影方向.

3. 选比例，定图幅

画图时，尽量选用 1∶1 的比例. 这样既便于直接估量组合体的大小，也便于画图. 按选定的比例，根据组合体长、宽、高预测出三个视图所占的面积，并在视图之间留出标注尺寸的位置和适当的间距，据此选用合适的标准图幅.

4. 布图、画基准线

先固定图纸，然后，画出各视图的基准线，每个视图在图纸上的具体位置就确定了. 基准线是指画图时测量尺寸的基准，每个视图需要确定两个方向的基准线. 一般常用对称中心线，轴线和较大的平面作为基准线，逐个画出各形体的三视图.

5. 画法

根据各形体的投影规律，逐个画出形体的三视图. 画形体的顺序：一般先实(实形体)后空(挖去的形体)；先大(大形体)后小(小形体)；先画轮廓，后画细节。画每个形体时，要三个视图联系起来画，并从反映形体特征的视图画起，再按投影规律画出其他两个视图. 对称图形、半圆和大于半圆的圆弧要画出对称中心线，回转体一定要画出轴线. 对称中心线和轴线用细点画线画出.

做一做

做出图 6-7 所示图形的三视图.

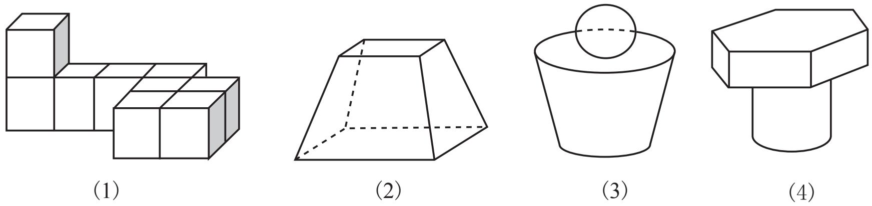


图 6-7

解： 如图 6-8 所示.

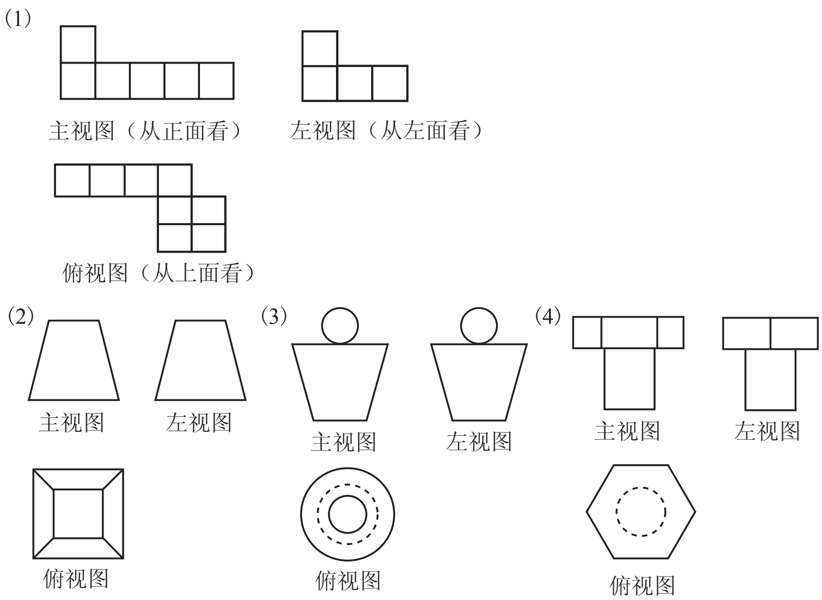


图 6-8

练一练

画出图 6-9 所示几何体的三视图.

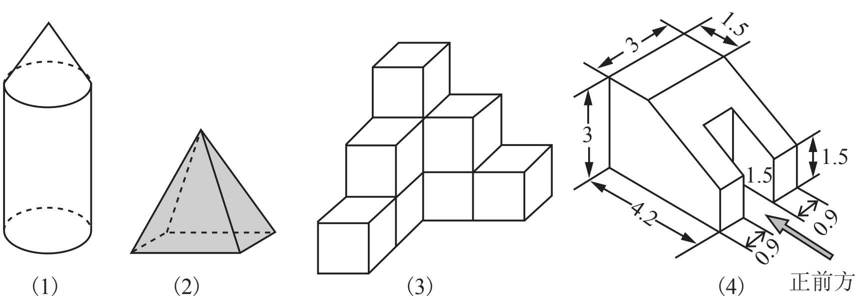


图 6-9

议一议

某建筑由相同的若干个房间组成，该楼三视图如图 6-10 所示，试问：

(1)该楼有几层？

(2)最高一层的房间在什么位置？

(3)该楼可以有多少个房间？

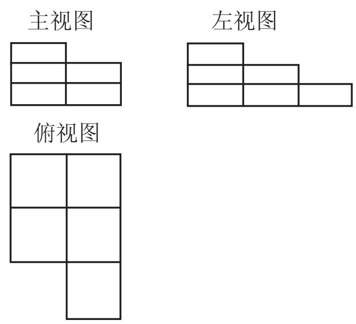


图 6-10

【小结】本模块我们学习了投影的基础知识，并借助投影的原理认识了视图，然后进一步讨论了如何由立体图画出三视图，如何由三视图想象出立体图. 通过对本部分内容的学习，要求学生经历实践探索，了解投影、投影面、平行投影和中心投影的概念；会画实物的三视图，学会关注生活中有关投影的数学问题，提高数学的应用意识.

综合练习

1. 图 6-11 是一个立体图形的三视图，那么这个立体图形是(　　).

A. 圆柱　　B. 棱锥　　C. 长方体　　D. 棱台

图 6-11

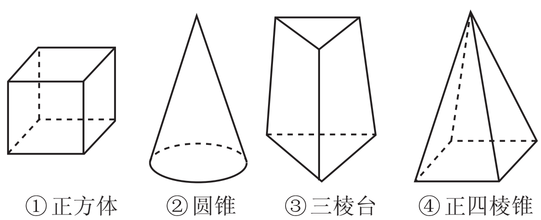


图 6-12

2. 图中几何体(图 6-12)各自的三视图中有且仅有两个视图相同的是(　　).

A. ①②　　B. ③　　C. ①④　　D. ②④

3. 下列四个命题：

①矩形的平行投影一定是矩形；②梯形的平行投影一定是梯形；

③两条相交直线的投影不可能平行；④正方形的平行投影一定是菱形.

其中正确命题的序号是(　　).

A. ①　　B. ②　　C. ③　　D. ④

4. 设长方体的标号为①、圆锥的标号为②、三棱锥的标号为③、圆柱的标号为④，图 6-13 是甲、乙、丙三个立体图形的三视图，则甲、乙、丙对应的标号是(　　).

A. ②①③　　B. ①②③　　C. ③②④　　D. ④③②

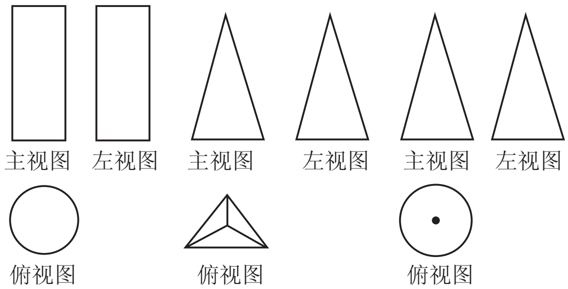


图 6-13

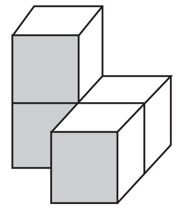


图 6-14

5．四个正方体按如图 6-14 所示的方式放置，其中阴影部分为我们观察的正面，如图 6-15所示，则该物体的三视图是(　　)．

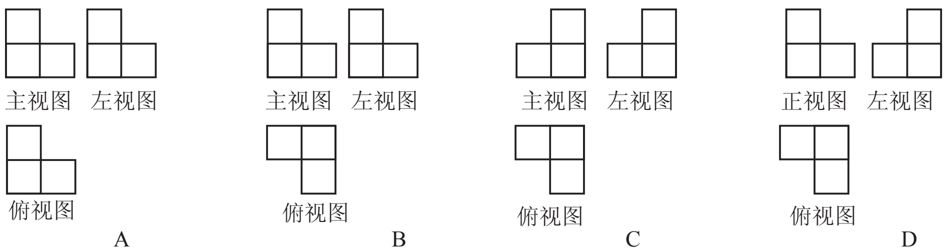


图 6-15

6．画出如图 6-16 所示的几何体的三视图．

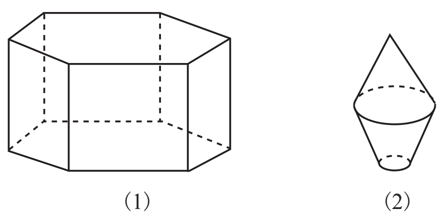


图 6-16

7．若一个几何体的三视图如图 6-17 所示，求这个几何体的表面积和体积．

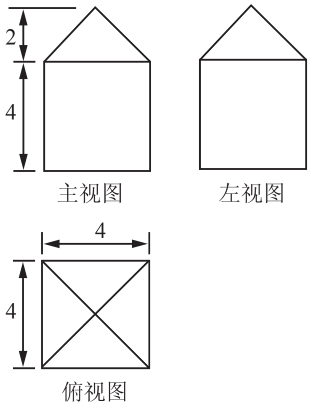


图 6-17

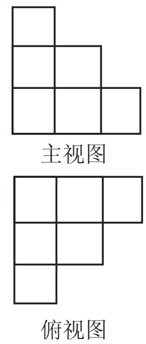


图 6-18

8. 用小立方块搭一个几何体，使它的正视图和俯视图如图 6-18 所示，那么它最多需要多少个小立方块？